RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Per affrontare la gravissima emergenza causata dalla guerra interplanetaria scatenata da *Tyrann* contro *Langane*, l'*Unione dei Mondi* ha chiesto il supporto dell'*Associazione Umanitaria Intergalattica* per preparare pasti preconfezionati con deperibilità a 4 settimane da distribuire ai profughi spaziali. L'Unione ha stimato la necessità di D_h pasti per ciascuna settimana h della fase acuta della crisi. Per predisporre un piano di aiuto alimentare articolato su 27 settimane, l'associazione può contare sul supporto di 68 aziende alimentari consociate. A ciascuna azienda è stato chiesto di dichiarare il proprio fabbisogno economico e garantire conseguenti livelli di produzione: l'azienda i necessita di un finanziamento di f_i apolli d'oro per avviare la produzione mentre il costo di un singolo pasto sarà c_{ih} nella settimana h del piano, per il quale può garantire fino a d_{ih} pasti. Da parte sua, nelle stesse settimane, l'associazione è in grado di produrre autonomamente nei propri stabilimenti fino a m_h pasti al costo di c_h apolli ciascuno e stima di ricevere donazioni per un ammontare complessivo settimanale di R_h apolli.

Aiuta l'Associazione Umanitaria Intergalattica a predisporre il piano di aiuto alimentare, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quanti pasti produrre, quali aziende coinvolgere e quante pasti far produrre a ciascuna in ogni settimana del piano nel rispetto delle capacità produttive in modo da minimizzare il costo complessivo al netto delle donazioni ricevute.

Scelte le famiglie di variabili

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{se l'azienda } i \text{ viene coinvolta,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$x_{ih} = \text{ numero di pasti richiesti all'azienda } i \text{ nella settimana } h, \qquad i = 1, \dots, 68, \; h = 1, \dots, 27$$

$$y_h = \text{ numero di pasti prodotti nei propri stabilimenti nella settimana } h,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\min$$

$$y_h \le m_h \qquad h = 1, \dots, 27$$

$$x_{ih}, y_h \in \mathbb{Z}_+, \; z_i \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, 68, \; h = 1, \dots, 27.$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\displaystyle\sum_{h=1}^{27} \Big(c_h y_h + \sum_{i=1}^{68} (c_{ih} x_{ih} + f_i z_i) - R_h \Big)$ (funzione obiettivo)

B $\displaystyle\sum_{h=1}^{27} \Big(c_h y_h + \sum_{i=1}^{68} c_{ih} x_{ih} \Big) + \sum_{i=1}^{68} f_i z_i$ (funzione obiettivo)

C $\displaystyle\sum_{h=1}^{27} \Big((c_h - R_h) y_h + \sum_{i=1}^{68} (c_{ih} x_{ih} + f_i z_i) \Big)$ (funzione obiettivo)

D $x_{ih} \le d_{ih} z_i \quad i = 1, \dots, 68, \; h = 1, \dots, 27$

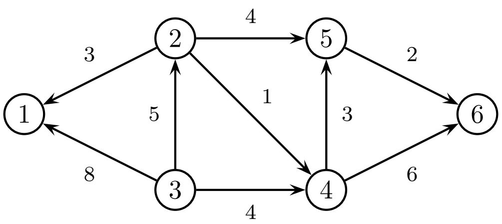
E $y_h + x_{ih} \le m_h + d_{ih} \quad i = 1, \dots, 68, \; h = 1, \dots, 27$

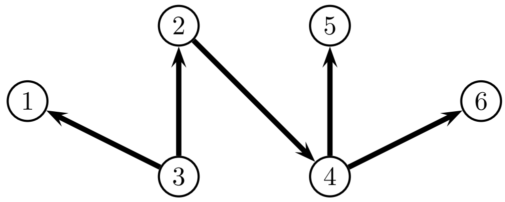
F $\displaystyle\sum_{k=a_h}^{h} \Big(y_k + \sum_{i=1}^{68} x_{ik} \Big) \ge \sum_{k=a_h}^{h} D_k \quad a_h = \max\{1, h-3\}, \; h = 1, \dots, 27$

G $y_h + x_{ih} \ge D_h \quad i = 1, \dots, 68, \; h = 1, \dots, 27$

H $\quad y_h + \sum_{i=1}^{68} x_{ih} z_i \geq D_h \quad h = 1, \ldots, 27$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo di sinistra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A $\quad d = (0, 5, 8, 6, 9, 12)$ è il vettore delle etichette relative all'albero

B $\quad$ Il costo dell'albero è 40

b) Quale coppia di archi non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\quad (3, 4), (5, 6)$ $\qquad$ II $\quad (1, 2), (3, 4)$ $\qquad$ III $\quad (2, 5), (5, 6)$

c) Quali archi bisogna sostituire nell'albero con quelli scelti al punto b) per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $\quad (1, 3), (2, 4)$ $\qquad$ II $\quad (4, 5), (4, 6)$ $\qquad$ III $\quad (2, 4), (4, 6)$

d) Qual è il costo del cammino minimo dalla radice al nodo 6?

I $\quad 10$ $\qquad$ II $\quad 12$ $\qquad$ III $\quad 9$

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia l'unico albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$
(P) \qquad
\begin{array}{lrcrcl}
\max & & & \alpha x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\quad$ Se $\alpha > 0$, allora (P) è superiormente illimitato

B $\quad \bar{x} = (2, 1)$ e $\bar{y} = (\alpha, 0, 0, -\alpha, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari

b) Se $\alpha = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\quad \{(2, 1)\}$ $\qquad$ II $\quad \{(t, 2) : -2 \leq t \leq 1\}$ $\qquad$ III $\quad \{(2, 2)\}$

c) Se $\alpha = 2$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I $\quad \{(t, t, 0, 2(2 - t), 0) : 0 \leq t \leq 2\}$ $\qquad$ II $\quad (D)$ è inferiormente illimitato $\qquad$ III $\quad \{(0, 0, 0, 0, 2)\}$

d) Qual è l'insieme delle direzioni di recessione del poliedro?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(-1,-1)\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 2\xi_2 \leq \xi_1 \leq \xi_2\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\emptyset$

e) Scegliere una funzione obiettivo per (P) in modo tale che le soluzioni $\bar{x} = (2,1)$ e $\hat{x} = (1,2)$ siano entrambe ottime. Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcr} \max & -x_1 & + & 2x_2 & & \\ & -x_1 & & & \leq & -1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcr} \min & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & 5y_4 & + & 3y_5 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & & & + & y_4 & + & y_5 & = & -1 \\ & & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{4,5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ $x = (3,2)$ è una soluzione di base

$\boxed{\text{B}}$ La direzione $\xi = (0,-1)$ è una direzione ammissibile per $x = (3,2)$

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

$\boxed{\text{I}}$ $\bar{x} = (3,0)$, $\bar{y} = (0,0,0,2,-1)$ $\boxed{\text{II}}$ $\bar{x} = (3,2)$, $\bar{y} = (0,0,0,2,-3)$ $\boxed{\text{III}}$ $\bar{x} = (1,2)$, $\bar{y} = (1,0,2,0,0)$

c) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

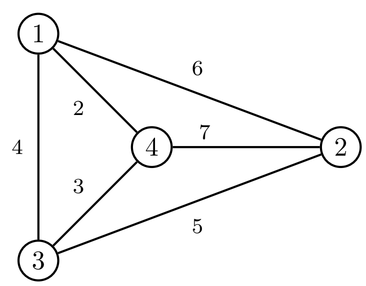
$\boxed{\text{I}}$ $\xi = (-1,0)$, $\bar{\lambda} = 2$ $\boxed{\text{II}}$ $\xi = (-1,1)$, $\bar{\lambda} = 0$ $\boxed{\text{III}}$ $\xi = (-1,1)$, $\bar{\lambda} = 1$

d) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

$\boxed{\text{I}}$ $\bar{x} = (3,2)$, $\bar{y} = (0,0,2,0,-3)$ $\boxed{\text{II}}$ $\bar{x} = (1,2)$, $\bar{y} = (1,0,2,0,0)$ $\boxed{\text{III}}$ $\bar{x} = (1,2)$, $\bar{y} = (0,1,2,0,0)$

e) Scegliere una funzione obiettivo per il problema primale (P) in modo tale che $\bar{x}$ individuato al punto precedente resti soluzione ottima e l'unica soluzione ottima del problema duale (D) sia degenere. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 4-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ $(2, 4)$ appartiene al ciclo hamiltoniano individuato dall'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4

$\boxed{\text{B}}$ Il 4-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{14} = 0$ è un ciclo hamiltoniano

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

$\boxed{\text{I}}$ $v_I = 16, v_S = 18$ $\boxed{\text{II}}$ $v_I = 14, v_S = 16$ $\boxed{\text{III}}$ $v_I = 14, v_S = 18$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

$\boxed{\text{I}}$ 1 per otttimalità ($v_I \geq v_S$) $\boxed{\text{II}}$ nessuno $\boxed{\text{III}}$ 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

$\boxed{\text{I}}$ 2: x_{14}, x_{34} $\boxed{\text{II}}$ 3: x_{14}, x_{34}, x_{13} $\boxed{\text{III}}$ 4: x_{14}, x_{34}, x_{13}, x_{23}

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.