RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Per contribuire ad arginare più rapidamente la pandemia in corso, le principali 25 aziende farmaceutiche della *Confederazione degli Imperi Chaotici* hanno offerto al colosso farmaceutico multimperiale *CheeryPills* la disponibilità dei propri stabilimenti per produrre il suo efficace vaccino. Nel contratto con la confederazione il colosso si è impegnato a fornire almeno D_h dosi a fronte di R_h denari per ciascun mese h del piano vaccinale, che si articola in 24 mesi. A ciascuna azienda è stato chiesto di avanzare le proprie richieste economiche e garantire conseguenti livelli di produzione: l'azienda i richiede un finanziamento di f_i denari per avviare la produzione e c_{ih} denari a dose nel mese h del piano, per il quale garantisce fino a d_{ih} dosi. Da parte sua, negli stessi mesi, CheeryPills è in grado di produrre autonomamente nei propri stabilimenti fino a m_h dosi al costo di c_h denari ciascuna.

Aiuta il colosso multimperiale a predisporre il suo piano di forniture, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quanti dosi produrre, quali aziende coinvolgere e quante dosi acquistare da ciascuna in ogni mese del piano nel rispetto delle capacità produttive e delle richieste della confederazione in modo da massimizzare il proprio profitto.

Scelte le famiglie di variabili

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{se l'azienda } i \text{ viene selezionata,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$x_{ih} = \text{ numero di dosi acquistate dall'azienda } i \text{ nel mese } h, \qquad i = 1, \dots, 25, \ h = 1, \dots, 24$$

$$y_h = \text{ numero di dosi prodotte nei propri stabilimenti nel mese } h,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \max & & \\ & y_h \le m_h & h = 1, \dots, 24 \\ & x_{ih}, y_h \in \mathbb{Z}_+, \ z_i \in \{0,1\} & i = 1, \dots, 25, \ h = 1, \dots, 24. \end{array}$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

[A] $\displaystyle\sum_{h=1}^{24} \Big(R_h - c_h y_h - \sum_{i=1}^{25} (c_{ih} x_{ih} + f_i z_i) \Big)$ (funzione obiettivo)

[B] $\displaystyle\sum_{h=1}^{24} \Big(R_h - c_h y_h - \sum_{i=1}^{25} c_{ih} x_{ih} \Big) - \sum_{i=1}^{25} f_i z_i$ (funzione obiettivo)

[C] $\displaystyle\sum_{h=1}^{24} \Big((R_h - c_h) y_h - \sum_{i=1}^{25} (c_{ih} x_{ih} + f_i z_i) \Big)$ (funzione obiettivo)

[D] $x_{ih} \le d_{ih} z_i \quad i = 1, \dots, 25, \ h = 1, \dots, 24$

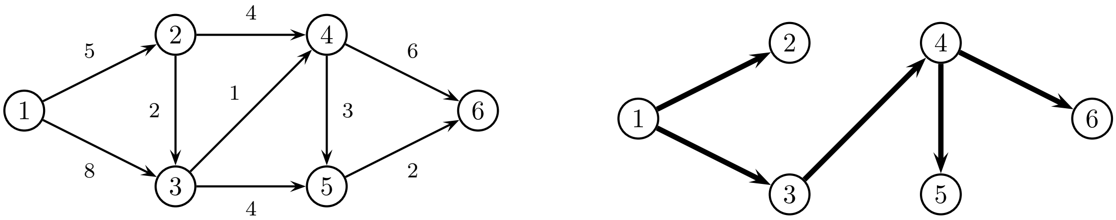
[E] $y_h + x_{ih} \le m_h + d_{ih} \quad i = 1, \dots, 25, \ h = 1, \dots, 24$

[F] $\displaystyle\sum_{k=1}^{h} \Big(y_k + \sum_{i=1}^{25} x_{ik} \Big) \ge \sum_{k=1}^{h} D_k \quad h = 1, \dots, 24$

[G] $y_h + x_{ih} \ge D_h \quad i = 1, \dots, 25, \ h = 1, \dots, 24$

[H] $\displaystyle y_h + \sum_{i=1}^{25} x_{ih} z_i \ge D_h \quad h = 1, \dots, 24$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A $d = (0, 5, 7, 9, 12, 14)$ è il vettore delle etichette relative all'albero

B Il costo dell'albero è 23

b) Quale coppia di archi non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $(2,3), (2,4)$ II $(2,4), (3,5)$ III $(2,3), (5,6)$

c) Quali archi bisogna sostituire nell'albero con quelli scelti al punto b) per ottenere un albero dei cammini minimi?

I $(1,3), (4,6)$ II $(3,4), (4,5)$ III $(1,3), (3,4)$

d) Qual è il costo del cammino minimo dalla radice al nodo 6?

I 15 II 12 III 13

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia un albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcl} \max & \alpha x_1 & & & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Se $\alpha < 0$, allora (P) è inferiormente illimitato

B $\bar{x} = (2,3)$ e $\bar{y} = (0,0,0,\alpha,0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari

b) Se $\alpha = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(2,1)\}$ II $\{(t,2) : 0 \leq t \leq 1\}$ III $\{(2,3)\}$

c) Se $\alpha = 4$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I $\{(t,t,0,2(2-t),0) : 0 \leq t \leq 2\}$ II (D) è inferiormente illimitato III $\{(0,0,0,4,0)\}$

d) Qual è l'insieme delle direzioni di recessione del poliedro?

I $\{(0,0)\}$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 2\xi_2 \leq \xi_1 \leq \xi_2\}$ III $\emptyset$

e) Scegliere una funzione obiettivo per (P) in modo tale che $x = (1,0)$ sia una soluzione ottima. Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P)\quad \begin{array}{rrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & -x_1 & & & \leq & -1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & & & \leq & 3
\end{array}
\qquad
(D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\min & -y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & + & 5y_4 & + & 3y_5 & & \\
 & -y_1 & - & y_2 & & & + & y_4 & + & y_5 & = & 2 \\
 & & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

[A] $x = (1, 0)$ è una soluzione di base

[B] La direzione $\xi = (0, 1)$ è una direzione ammissibile per $x = (1, 0)$

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

[I] $\bar{x} = (3, 0)$, $\bar{y} = (0, 0, 1, 0, 2)$ [II] $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (-3, 1, 0, 0, 0)$ [III] $\bar{x} = (3, 3)$, $\bar{y} = (0, 0, 1, 0, 2)$

c) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

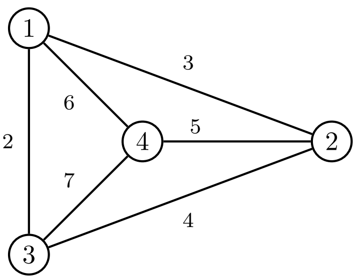
[I] $\xi = (1, 1)$, $\bar{\lambda} = 1$ [II] $\xi = (0, -1)$, $\bar{\lambda} = 2$ [III] $\xi = (1, 1)$, $\bar{\lambda} = 2$

d) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

[I] $\bar{x} = (2, 3)$, $\bar{y} = (0, -1, 1, 1, 0)$ [II] $\bar{x} = (3, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, 0, 1, 1)$ [III] $\bar{x} = (3, 2)$, $\bar{y} = (0, 1, 0, 0, 3)$

e) Scegliere una funzione obiettivo per il problema primale (P) in modo tale che $\bar{x}$ individuato al punto precedente sia l'unica soluzione ottima e la soluzione ottima del problema duale (D) sia degenere. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

[A] L'arco $(1, 2)$ appartiene al ciclo hamiltoniano individuato dall'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1

[B] L'1-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{12} = 1$ è un ciclo hamiltoniano

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

[I] $v_I = 14, v_S = 20$ [II] $v_I = 16, v_S = 17$ [III] $v_I = 14, v_S = 17$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

| I | 1 per otttimalità ($v_I \geq v_S$) | II | nessuno | III | 1 per inammissibilità |

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

| I | 2: x_{13}, x_{12} | II | 3: x_{13}, x_{12}, x_{23} | III | 4: x_{13}, x_{12}, x_{23}, x_{24} |

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.