RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna) e si risponda alle eventuali domande finali.

1) Per arginare la pandemia in corso, la Regione Etruria ha deciso di assegnare il trasporto scolastico della provincia alfea al consorzio di autotrasportatori *TuttiSicuriTuttiSani* che dispone di m autobus di varie capienze. Più precisamente, l'autobus j ha una capienza di c_j posti. Nella provincia sono presenti n scuole e a_i è il numero di studenti della scuola i che necessitano del servizio di trasporto (con $a_i > c_j$ per ogni coppia "scuola autobus"). Per esigenze sanitarie di contenimento del rischio di contagio, la regione richiede che ciascun autobus utilizzato trasporti studenti di una sola scuola e che la più alta percentuale dei posti occupati sugli autobus sia la più piccola possibile.

Aiuta il coordinatore del consorzio a pianificare il trasporto, formulando in termini di P.L.I. il problema di garantire il trasporto a tutti gli studenti della provincia nel rispetto dei vincoli sanitari e di capienza in modo da minimizzare la massima percentuale dei posti occupati sugli autobus.

Scelte le famiglia di variabili

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'autobus } j \text{ trasporta studenti della scuola } i \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} = \text{ numero di studenti della scuola } i \text{ trasportati sull'autobus } j$$

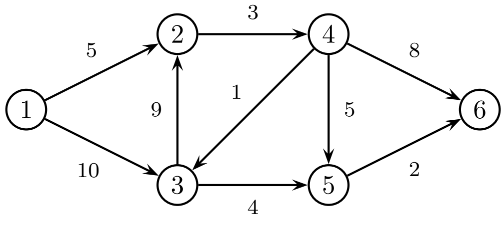
e la variabile ausiliaria u per rappresentare un'approssimazione superiore della massima percentuale di posti occupati, parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

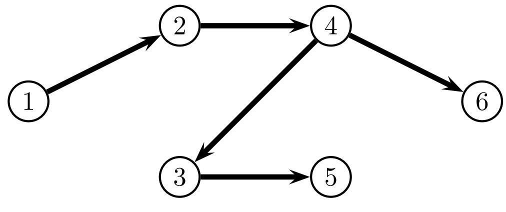
$$\begin{array}{lll} \min & u & \\ & \sum_{i=1}^{n} y_{ij} \leq 1 & j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, y_{ij} \in \{0,1\}, u \in \mathbb{R} & i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m \end{array}$$

Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

- A $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, n$
- B $x_{ij} y_{ij} \leq c_j \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m$
- C $x_{ij} \leq c_j y_{ij} \quad i = 1, \dots, n, \ j = 1, \dots, m$
- D $\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right) / c_j \geq u \quad j = 1, \dots, m$
- E $\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right) / c_j \leq u \quad j = 1, \dots, m$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:



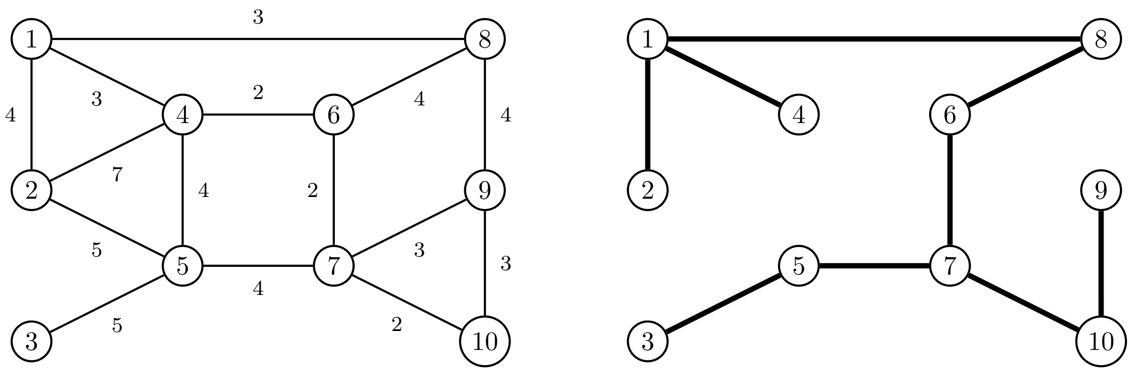


a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

- A $d = (0, 5, 10, 8, 13, 16)$ è il vettore delle etichette relative all'albero
- B Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco $(1, 3)$ non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman
- C Sostituendo l'arco $(4, 6)$ con l'arco $(5, 6)$ si ottiene un albero dei cammini minimi
- D Il cammino dal nodo 1 al nodo 5 sull'albero è di costo minimo

b) Modificare il costo di un arco. Quali arco e costo scegliere affinché l'albero a destra sia un albero dei cammini minimi?

3) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

- [A] Sostituendo l'arco $(1, 4)$ con l'arco $(2, 4)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato
- [B] Il costo dell'arco $(3, 5)$ non è rilevante per l'eventuale ottimalità dell'albero
- [C] Non è un albero di costo minimo perché l'arco $(7, 9)$ non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli
- [D] Non è un albero di costo minimo perché l'arco $(4, 6)$ non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli

b) Modificare il costo di un arco. Quali arco e costo scegliere affinché l'albero a destra sia un albero di costo minimo? Si mantenga il costo modificato e si aggiunga l'arco $(3, 10)$. Quale costo scegliere per il nuovo arco affinché l'albero a destra rimanga un albero di costo minimo?

4) Si consideri la seguente coppia di problemi duali di Programmazione Lineare:

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 6y_1 & + & 2y_2 & & & & & & \\ & 2y_1 & & & - & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & + & y_2 & & & - & y_4 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- [A] $(0, 2)$ è una soluzione ottima per (P)
- [B] $(3, 0)$ è una soluzione primale di base degenere
- [C] $(1, 0, 1, 0)$ è una soluzione ottima per (D)
- [D] $(2, 2)$ e $(1/2, 3/2, 0, 0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D)

b) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema (D)?

5) Si supponga di risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

tramite l'algoritmo del simplesso primale partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? (*suggerimento: utilizzare la rappresentazione grafica in* $\mathbb{R}^2$).

$\boxed{\text{A}}$ L'indice uscente alla prima iterazione è $h = 3$

$\boxed{\text{B}}$ La base ottenuta alla seconda iterazione è $\{2, 3\}$

$\boxed{\text{C}}$ La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è $(3, 0)$

$\boxed{\text{D}}$ Il valore ottimo del problema è 8

b) Quanti cambi di base sono necessari per trovare una soluzione ottima? Qual è la soluzione ottima trovata?

6) Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 10x_1 & + & 11x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & & \\
 & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 10 \\
\multicolumn{10}{c}{x_1,\ \ x_2,\ \ x_3,\ \ x_4 \in \{0, 1\}}
\end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono: $v_I(P) = 15$ e $v_S(P) = 17$

$\boxed{\text{B}}$ Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono: $v_I(P) = 18$ e $v_S(P) = 19$

$\boxed{\text{C}}$ Una soluzione ottima del rilassamento continuo è $(0, 5/6, 1, 1)$

$\boxed{\text{D}}$ Una soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1, 5/6, 0, 0)$

b) Qual è la soluzione ottima del problema? Quanti nodi dell'albero di enumerazione bisogna visitare prima di individuare la soluzione ottima?