

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna)

1) Dati n oggetti di peso p_1, \dots, p_n e m contenitori di capacità C_1, \dots, C_m , tutti gli oggetti devono venir inseriti nei contenitori utilizzando il minor numero possibile di contenitori nel rispetto della capacità degli stessi.

Scelte le 2 famiglie di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ viene inserito nel contenitore } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } j \text{ viene utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

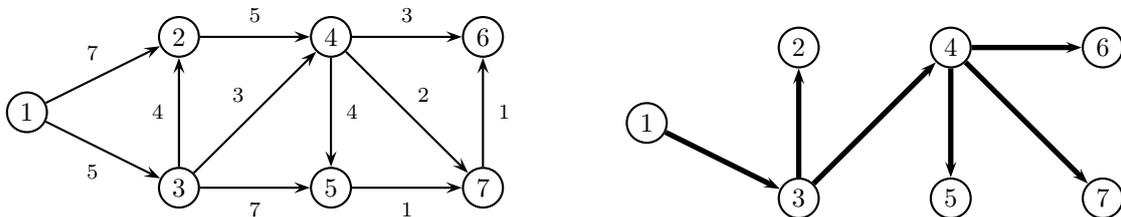
parte della formulazione in termini di PLI del problema è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^m y_j \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n \\ & x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Quali dei seguenti vincoli permettono di completare correttamente la formulazione?

- A $\sum_{j=1}^m p_i x_{ij} \leq C_k y_k \quad i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, m$
- B $x_{ij} \geq C_j y_j \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$
- C $\sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq C_j, x_{ij} \leq y_j \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$
- D $\sum_{i=1}^n p_i x_{ij} = C_j y_j \quad j = 1, \dots, m$
- E $\sum_{i=1}^n p_i x_{ij} \leq C_j y_j \quad j = 1, \dots, m$

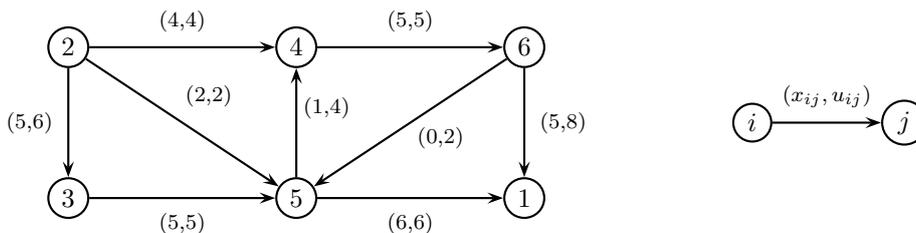
2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:



Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

- A $d = (0, 7, 5, 8, 12, 11, 10)$ è il vettore delle etichette relative all'albero
- B Sostituendo l'arco (4, 5) con l'arco (3, 5) si ottiene un albero che ha lo stesso vettore di etichette di quello dato
- C Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco (1, 2) non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman
- D Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco (5, 7) non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman
- E Sostituendo l'arco (4, 5) con l'arco (3, 5) si ottiene un albero dei cammini minimi

3) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 2 al nodo 1 sul grafo seguente:



Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A Il valore del flusso riportato in figura è 11
- B Il taglio $(\{2, 3, 4, 5\}, \{1, 6\})$ è di capacità minima
- C Il flusso riportato in figura non è di valore massimo
- D L’algoritmo di Edmonds-Karp individua il taglio $(\{2, 3, 5\}, \{1, 4, 6\})$
- E Aumentando la capacità dell’arco $(3, 5)$ il valore del flusso massimo non cambia

4) Si consideri la seguente coppia di problemi duali di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_1 + x_2 \\
 (P) & x_1 + x_2 \leq 3 \\
 & x_1 - 2x_2 \leq 2 \\
 & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 2 \\
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min & 3y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 \\
 (D) & y_1 + y_2 - y_3 = 1 \\
 & y_1 - 2y_2 + y_3 + y_4 = 1 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0.
 \end{array}$$

Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A $(2, 1)$ e $(1, 0, 0, 0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D)
- B $(2, 1)$ e $(1, 0, 0, 0)$ sono entrambe soluzioni di base
- C $(1, 2)$ e $(1, 0, 0, 0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D)
- D $(1, 2)$ e $(1, 0, 0, 0)$ sono entrambe soluzioni di base
- E $(1, 0, 0, 0)$ è l’unica soluzione ottima di (D)

5) Si supponga di risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{ll}
 \max & 2x_1 - x_2 \\
 & -x_1 \leq 0 \\
 & -x_2 \leq 0 \\
 & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 1
 \end{array}$$

con l’algoritmo del simplesso primale partendo dalla base $B = \{1, 4\}$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? (Suggerimento: utilizzare la rappresentazione grafica del problema in \mathbb{R}^2).

- A La base ottenuta alla seconda iterazione è $\{3, 4\}$
- B La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è $(1, 0)$
- C L’indice uscente alla prima iterazione è $h = 4$
- D La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è $(0, 0)$
- E La soluzione ottima del problema è $(1, 0)$

6) Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 10x_4 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 10x_4 \leq 12 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono: $v_I(P) = 14$ e $v_S(P) = 16$
- B Una soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1, 1, 1, 3/10)$
- C Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono: $v_I(P) = 12$ e $v_S(P) = 15$
- D Una soluzione ottima del problema è $(1, 0, 0, 1)$
- E Una soluzione ottima del rilassamento continuo è $(0, 0, 1/2, 1)$