RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda a) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande b), c), d) e si risponda alla domanda finale e).

1) Per migliorare il servizio, la gestione e la manutenzione nonché per aggiornare lo schema dei prezzi dei biglietti, la direttrice del sistema dei trasporti della *Metropoli Oscillante* ha commissionato al suo capo tecnico *Marc Quantic* uno studio sugli effettivi spostamenti dei passeggeri del vastissimo *tubo sotterraneo*. Grazie al sistema di ricetrasmissione elettronico di pagamenti ed accesso, per ciascun viaggio k effettuato sono registrabili la stazione di origine o_k e la stazione di destinazione d_k nonché il tempo impiegato t_k, ma non l'effettivo tragitto. Questi dati sono disponibili per gli m viaggi compiuti in un giorno di riferimento, e si conosce inoltre la durata canonica c_{ij} dello spostamento tra due stazioni consecutive i e j ed il numero massimo di passeggeri M_{ij} che tale tratta può quotidianamente trasportare.

Aiuta il capo tecnico a ricostruire i percorsi di tutti i viaggi nel modo più accurato possibile: si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere il percorso effettuato da ciascun viaggio con l'obiettivo di minimizzare la media delle discrepanze percentuali tra i tempi stimati di viaggio e quelli effettivi.

Sia (N, A) il grafo orientato i cui nodi rappresentano le stazioni del tubo mentre gli archi individuano le tratte tra coppie di stazioni consecutive. Schematizzate le coppie origini-destinazioni dei viaggi attraverso la matrice di dati di coefficienti

$$b_i^k = \begin{cases} -1 & \text{if } i = o_k \\ 0 & \text{if } i \neq o_k, d_k \\ 1 & \text{if } i = d_k \end{cases} \qquad i \in N,\ k = 1, \ldots, m$$

e scelte le famiglie di variabili

x_{ij}^k = numero di volte che la tratta (i, j) viene percorsa durante il viaggio k $\quad (i, j) \in A,\ k = 1, \ldots, m$

s_k = approssimazione superiore della discrepanza % tra tempo stimato ed effettivo del viaggio k $\quad k = 1, \ldots, m$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \\ & \sum_{k=1}^{m} x_{ij}^k \leq M_{ij} && (i, j) \in A \\ & x_{ij}^k \in \mathbb{Z}_+ && (i, j) \in A,\ k = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

[A] $\sum_{k=1}^{m} s_k$ (funzione obiettivo)

[B] $\left(\sum_{k=1}^{m} t_k\right)/m$ (funzione obiettivo)

[C] $\sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^k - \sum_{j \in BN(i)} x_{ji}^k = b_i^k \quad i \in N,\ k = 1, \ldots, m$

[D] $\sum_{j \in BN(i)} x_{ji}^k - \sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^k = b_i^k \quad i \in N,\ k = 1, \ldots, m$

[E] $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k - t_k \geq 0 \quad k = 1, \ldots, m$

[F] $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k - t_k \leq s_k \quad k = 1, \ldots, m$

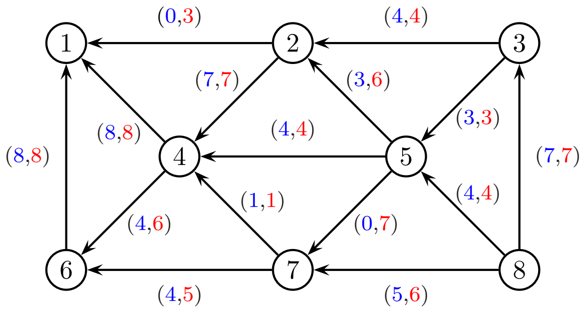
[G] $\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}^k \leq t_k s_k \quad k = 1, \ldots, m$

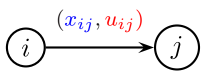
H $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}^k - t_k \leq t_k s_k \quad k = 1,\ldots,m$

I $\displaystyle|\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}^k - t_k\ | \leq t_k s_k \quad k = 1,\ldots,m$

J $\displaystyle t_k - \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}^k \leq t_k s_k \quad k = 1,\ldots,m$

2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 8 al nodo 1 sul grafo seguente:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso nel taglio $(\{1,2,3\},\{4,5,6,7,8\})$ è 16

B La capacità del taglio $(\{1,2,3,4,5,6\},\{7,8\})$ è 24

b) Qual è un cammino aumentante?

I $\{8,7,6,1\}$ II $\{8,7,6,4,2,1\}$ III non ne esistono

c) Quale dei seguenti è un taglio di capacità minima?

I $(\{1\},\{2,3,4,5,6,7,8\})$ II $(\{1,2,4,5,6\},\{3,7,8\})$ III $(\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8\})$

d) Diminuendo la capacità dell'arco $(4,5)$ a $u_{45} = 3$, di quanto diminuisce il valore del flusso massimo?

I 3 II 1 III 0

e) Modificare la capacità di 1 solo arco in modo che la capacità minima dei tagli sia 19. Giustificare la risposta.

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & 2\alpha\, x_1 & + & x_2 & & \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & \beta x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (0,-1)$ è una direzione ammissibile per $\bar{x} = (0,1)$

B $\bar{x} = (0,1)$ e $\bar{y} = (0,-\alpha,0,0,1+\alpha)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari se e solo se $-1 \leq \alpha \leq 0$

b) Quali sono tutti i valori di α per cui $\bar{y} = (0, -\alpha, 0, 0, 1+\alpha)$ è soluzione ottima di (D)?

I $|\alpha| \leq 1$ | II $-1 \leq \alpha \leq 0$ | III dipendono da β

c) Se $\beta < 1$, quali sono tutti i valori di α per cui $\hat{x} = (2, -1)$ è soluzione ottima di (P)?

I $|\alpha| \leq 1$ | II $\alpha \geq 1$ | III dipendono da β

d) Se $\alpha = -1$ e $\beta \geq 0$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I (P) è sup. illimitato | II $\{(0,1)\}$ | III $\{(t, 1+2t) : t \leq 0\}$

e) Scegliere valori per α e β in modo tale che (D) sia inferiormente illimitato. Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & - & 4x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 4y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & & \\ & y_1 & - & y_2 & & & + & 2y_4 & = & 1 \\ & -4y_1 & + & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (-1, -1)$ è una direzione di recessione della regione ammissibile di (P)

B $h = 2$ e $k = 3$ sono l'indice uscente ed entrante individuati alla prima iterazione dell'algoritmo

b) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla seconda iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (1, 1)$, $\bar{\lambda} = 0$ | II $\xi = (1, 0)$, $\bar{\lambda} = 1$ | III $\xi = (1, 0)$, $\bar{\lambda} = 0$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

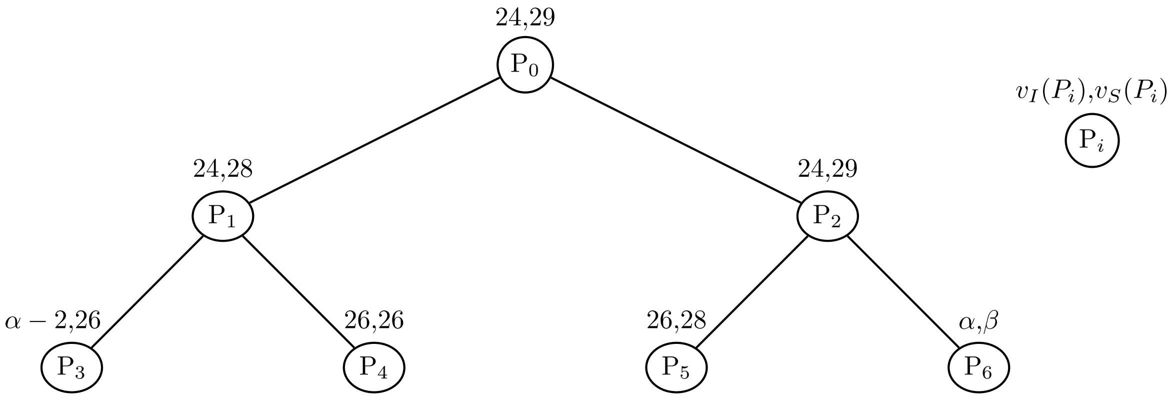
I $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (0, -1, 2, 0)$ | II $\bar{x} = (-2, -1)$, $\bar{y} = (0, 2/3, 5/3, 0)$ | III $\bar{x} = (1, 2)$, $\bar{y} = (0, 0, 1/2, 1/2)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_1 + y_2 \geq 1$ | II $y_1 + y_2 \leq 1$ | III $y_3 + y_4 \geq 1$

e) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (D) in modo tale che il problema (P) sia superiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si consideri un problema di Programmazione Lineare Intera con variabili binarie $x_j \in \{0,1\}$. In figura è riportata la porzione dell'albero di enumerazione totale ottenuta tramite l'esecuzione di alcune iterazioni di un metodo "Branch and Bound" opportuno: i nodi sono stati visitati in ordine crescente dell'indice del sottoproblema P_i e sul nodo sono riportate le corrispondenti valutazioni inferiore $v_I(P_i)$ e superiore $v_S(P_i)$.



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ Si tratta di un problema di minimizzazione

$\boxed{\text{B}}$ β deve necessariamente soddisfare la disuguaglianza $\beta \leq 29$

b) Quale valore α non può assumere?

$\boxed{\text{I}}$ $\alpha = \beta$ $\boxed{\text{II}}$ $\alpha = 25$ $\boxed{\text{III}}$ $\alpha = 28$

c) Quale relazione è sempre verificata?

$\boxed{\text{I}}$ $\alpha \leq \beta$ $\boxed{\text{II}}$ $\alpha \geq 26$ $\boxed{\text{III}}$ $\alpha = \beta$

d) Se $\alpha = \beta = 26$, qual è l'insieme di tutti i nodi che possono venir chiusi?

$\boxed{\text{I}}$ $\{P_4, P_6\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{P_3, P_5\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\{P_3, P_4, P_6\}$

e) Si scelgano valori per α e β che garantiscano la chiusura di tutti i nodi ancora aperti. Giustificare la scelta effettuata.