RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Le astronavi *Arcardiae* della flotta del pirata spaziale *Capitan Albator* hanno saccheggiato i ricchissimi pianeti del sistema solare *Tau Ceti* e sono in attesa di istruzioni per coordinare la fuga fuori del sistema solare stesso. Infatti i pianeti sono collegati tra loro e con l'unico portale di accesso al sistema solare da una capillare rete di buchi arancioni: queste connessioni spazio-temporali, progettate dal *professor Vorelli*, possono venir percorse in tempo unitario (indipendentemente dalla distanza) ma ciascuna da una sola astronave alla volta. Inoltre, la rete può sopportare al più lo spostamento di M astronavi per unità di tempo, pena il suo collasso.

Sapendo che su ciascun pianeta i sono presenti b_i astronavi, aiuta Capitan Albator a pianificare il piano di fuga da Tau Ceti: si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere come e quando le astronavi si dovranno spostare attraverso i punti della rete fino a raggiungere tutte il portale di accesso, nel rispetto delle capacità di trasporto individuali e collettiva dei buchi arancioni, con l'obiettivo di minimizzare il tempo di completamento della fuga.

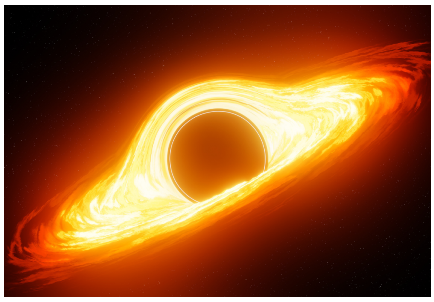
Sia (N, A) il grafo orientato i cui nodi rappresentano i pianeti e il portale di accesso mentre gli archi individuano i buchi arancioni tra coppie di pianeti oppure tra un pianeta e il portale di accesso p. Sia inoltre T il prodotto tra il numero complessivo di astronavi e la massima distanza (espressa in numero di buchi arancioni) tra i pianeti e il portale di accesso. Scelte le famiglie di variabili

$$y_t = \begin{cases} 1, & \text{se la } t\text{-esima unità di tempo viene utilizzata,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad t = 1, \dots, T$$

$$x_{ij}^t = \begin{cases} 1, & \begin{array}{l}\text{se il buco arancione } (i,j) \in A \text{ viene} \\ \text{percorso da 1 astronave al tempo } t,\end{array} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad (i,j) \in A, \ t = 1, \dots, T$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \min & & \\ & x_{ij}^t \le y_t & (i,j) \in A, \ t = 1, \dots, T \\ & \sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^1 \le b_i, & i \in N, \ i \ne p \\ & \sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^t \le b_i + \sum_{s=1}^{t-1} \Big(\sum_{j \in BN(i)} x_{ji}^s - \sum_{j \in FN(i)} x_{ij}^s \Big), & i \in N, \ i \ne p, \ t = 2, \dots, T \\ & y_t, x_{ij}^t \in \{0, 1\} & (i,j) \in A, \ t = 1, \dots, T. \end{array}$$



a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

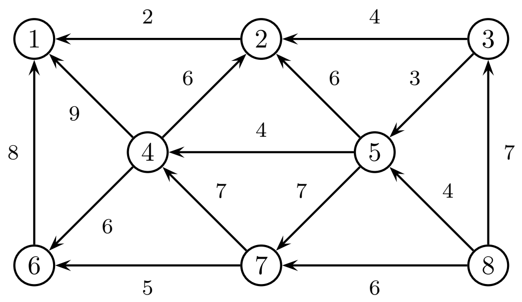
- [A] $\sum_{t=1}^{T} y_t$ (funzione obiettivo)
- [B] $\max\{ y_t \ : \ t = 1, ..., T \}$ (funzione obiettivo)
- [C] $\sum_{t=2}^{T} (y_t - y_{t-1})$ (funzione obiettivo)
- [D] $\sum_{t=1}^{T} x_{ij}^t \le M \quad (i,j) \in A$
- [E] $\sum_{(i,j) \in A} x_{ij}^t \le M \quad t = 1, \dots, T$
- [F] $y_t \le y_{t-1} \quad t = 2, \dots, T$
- [G] $y_t \ge y_{t-1} \quad t = 2, \dots, T$

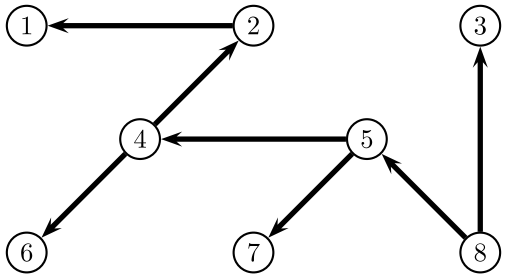
H $\displaystyle\sum_{j\in BN(i)} x^t_{ji} + b_i = \sum_{j\in FN(i)} x^t_{ij} \quad i\in N,\ i\neq p,\ t=1,\dots,T$

I $\displaystyle\sum_{j\in BN(i)} \Big(\sum_{t=1}^{T} x^t_{ji}\Big) + b_i = \sum_{j\in FN(i)} \Big(\sum_{t=1}^{T} x^t_{ij}\Big) \quad i\in N,\ i\neq p$

J $\displaystyle\sum_{j\in BN(i)} b_i x^t_{ji} = \sum_{j\in FN(i)} b_j x^t_{ij} \quad i\in N,\ i\neq p,\ t=1,\dots,T$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 8 sul grafo di sinistra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A Sostituendo l'arco $(4,2)$ con l'arco $(5,2)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

B $d = (16,14,7,8,4,14,11,0)$ è il vettore delle etichette relative all'albero

b) Qual è l'insieme di tutti gli archi che non soddisfano le corrispondenti condizioni di Bellman?

I $\{(5,2),(8,7)\}$ II $\{(3,2),(8,7)\}$ III $\{(3,2),(5,2),(8,7)\}$

c) Quali sostituzioni di archi bisogna fare con alcuni scelti al punto b) per minimizzare il costo dell'albero risultante?

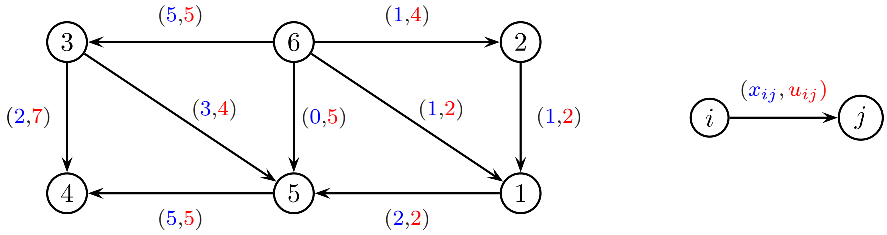
I $(5,7)$ con $(8,7)$ II $(4,2),(5,7)$ con $(5,2),(8,7)$ III $(4,2),(5,7)$ con $(3,2),(8,7)$

d) Qual è il costo di un albero dei cammini minimi?

I 34 II 58 III 35

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia l'unico albero dei cammini minimi. Giustificare la risposta.

3) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 6 al nodo 4 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso nel taglio $(\{1,2,5,6\},\{3,4\})$ è 13

B La capacità del taglio $(\{1,3,6\},\{2,4,5\})$ è 22

b) Qual è un cammino aumentante?

I $\{6,5,3,4\}$	II $\{6,5,4\}$	III non ne esistono

c) Quale dei seguenti è un taglio di capacità minima?

I $(\{1,2\},\{3,4,5,6\})$	II $(\{1,2,5,6\},\{3,4\})$	III $(\{5,6\},\{1,2,3,4\})$

d) Diminuendo la capacità dell'arco $(3,4)$ a $u_{34}=4$, di quanto diminuisce il valore del flusso massimo?

I 3	II 1	III 0

e) Modificare la capacità di 1 solo arco in modo che la capacità minima dei tagli sia 13. Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P)\quad \begin{array}{rrcrcr}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 4\\
 & & & x_2 & \leq & 4\\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 6\\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 2\\
 & & & -x_2 & \leq & 0
\end{array}
\qquad
(D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcr}
\min & 4y_1 & + & 4y_2 & + & 6y_3 & + & 2y_4 & & & & \\
 & y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & & & = & 2\\
 & & & y_2 & + & y_3 & - & y_4 & - & y_5 & = & 1\\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B=\{1,4\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi=(-1,0)$ è una direzione di recessione della regione ammissibile di (P)

B $x=(2,4)$ e $y=(0,-1,2,0,0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari

b) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi=(1,1)$, $\bar{\lambda}=0$	II $\xi=(0,1)$, $\bar{\lambda}=2$	III $\xi=(0,1)$, $\bar{\lambda}=0$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

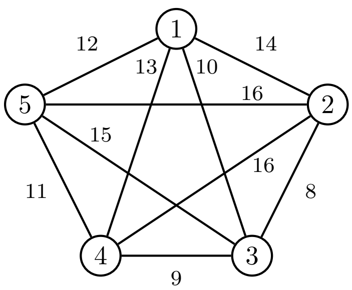
I $\bar{x}=(4,2)$, $\bar{y}=(3,0,0,-1,0)$	II $\bar{x}=(4,2)$, $\bar{y}=(1,0,1,0,0)$	III $\bar{x}=(2,4)$, $\bar{y}=(0,0,2,0,0)$

d) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I $\{(0,0,2,0,0)\}$	II $\{(3-2t,0,t,t-1,0)\ :\ 1\leq t\leq 3/2\}$	III $\{(1-2t,0,t+1,t,0)\ :\ 0\leq t\leq 1\}$

e) Modificare il termine noto di uno dei vincoli di (P) in modo tale che il problema duale (D) risulti inferiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 5-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

[A] L'arco $(1, 5)$ appartiene alla soluzione ammissibile di partenza

[B] L'arco $(1, 4)$ appartiene al 5-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{13} = 0$

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

[I] $v_I = 52, v_S = 54$ [II] $v_I = 50, v_S = 54$ [III] $v_I = 52, v_S = 52$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

[I] 1 per $v_I(P_i) \geq v_S(P_i)$ [II] 2 per ammissibilità [III] 1 per inammissibilità

d) Su quante variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

[I] 2 [II] 3 [III] 6

e) Modificare il costo di 1 solo arco appartenente alla soluzione iniziale in modo tale che nessun nodo venga chiuso alla prima ramificazione. Giustificare la scelta effettuata.