RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda $a)$ (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande $b), c), d)$ e si risponda alla domanda finale $e)$.

1) Gli informatores pretoriani della *Polis dell'Eterna Beltà* hanno scoperto piani segreti dei *Comati Nordici* per arruolare bande di barbari allo scopo di imbrattare con vernice indelebile alcuni degli n monumenti della polis, e hanno avvisato il Primo Console *Gattabella*. Il proconsole alla tecnologia ha tempestivamente messo a disposizione m androidi di ultimissima generazione per proteggere i monumenti: i tecnici del proconsole hanno stimato che a_i androidi siano sufficienti a fornire la massima protezione possibile al monumento i e che il livello di protezione aumenti proporzionalmente al numero di androidi impiegati, mentre il costo di installazione del sistema di protezione ammonta a f_i aurei più un costo di gestione c_i per ciascun androide impiegato. A questo scopo il proconsole alle finanze ha messo a disposizione uno stanziamento complessivo di A aurei.

Aiuta il Primo Console a predisporre un piano di protezione che tuteli almeno due terzi dei monumenti, formulando il termini di P.L.I. il problema di decidere quali monumenti proteggere e con quanti androidi ciascuno nel rispetto dello stanziamento assegnato in modo da massimizzare il minimo livello di protezione garantito ai monumenti protetti.

Scelte le famiglie di variabili

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se il monumento } i \text{ viene protetto,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,$$

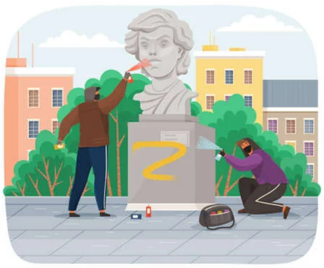
$$x_i = \text{numero di androidi dislocati a protezione del monumento } i,$$

parte della formulazione è data dalla funzione obiettivo e dai vincoli riportati qua sotto:

$$\max \quad \ell$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le m \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \; x_i \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, \dots, n,$$

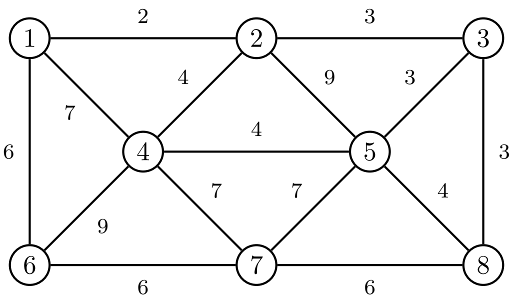


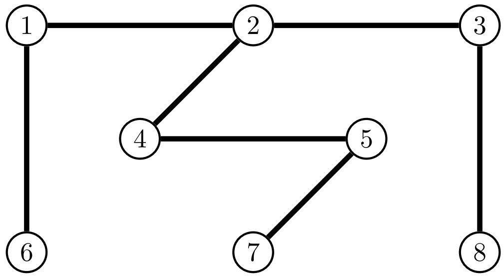
dove la variabile ausiliaria ℓ fornisce un'approssimazione inferiore del minimo livello di protezione dei monumenti protetti.

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

- [A] $\sum_{i=1}^{n} (f_i + c_i x_i) \le A \sum_{i=1}^{n} y_i$
- [B] $\sum_{i=1}^{n} (f_i y_i + c_i x_i) \le A$
- [C] $x_i \le a_i y_i \qquad i = 1, \dots, n$
- [D] $x_i \ge y_i \qquad i = 1, \dots, n$
- [E] $x_i \ge a_i y_i \qquad i = 1, \dots, n$
- [F] $a_i \ell \le x_i + a_i(1 - y_i) \qquad i = 1, \dots, n$
- [G] $a_i \ell \le x_i \qquad i = 1, \dots, n$
- [H] $a_i \ell \ge x_i + a_i(1 - y_i) \qquad i = 1, \dots, n$
- [I] $3 \sum_{i=1}^{n} y_i \ge 2n$
- [J] $2 \sum_{i=1}^{n} y_i \ge 3n$

2) Si considerino il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra e l'albero riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

[A] Sostituendo l'arco $(3,8)$ con l'arco $(3,5)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

[B] Nel grafo esistono altri 5 alberi di copertura che hanno lo stesso costo di quello a destra

b) Quale arco non soddisfa la condizione di ottimalità per tagli?

[I] nessuno [II] $(1,6)$ [III] $(2,4)$

c) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

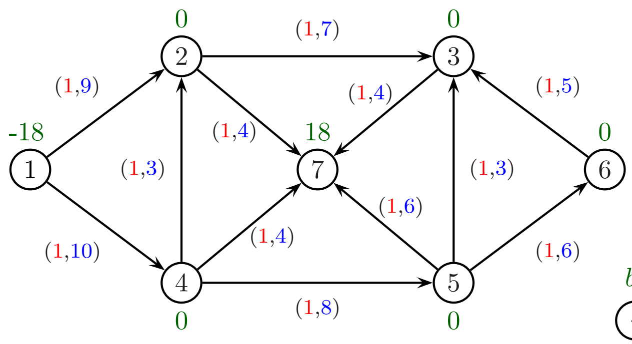
[I] $(5,8),(6,7),(7,8)$ [II] $(3,5),(6,7),(7,8)$ [III] $(4,6),(4,7)$

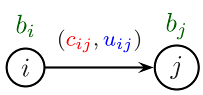
d) Quali sostituzioni di archi bisogna fare per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

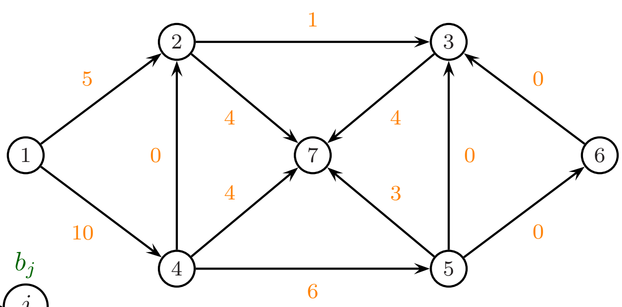
[I] $(2,3),(4,5),(5,7)$ con $(3,5),(6,7),(7,8)$ [II] $(4,5)$ con $(3,5)$ [III] $(4,5),(5,7)$ con $(3,5),(7,8)$

e) Modificare il costo del minor numero possibile di archi affinché l'albero a destra sia un albero di copertura di costo minimo. Giustificare la risposta.

3) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:







a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

[A] Il vettore degli sbilanciamenti è $e_x = (3,0,-3,0,3,0,-3)$ con sbilanciamento complessivo $g(x) = 0$

[B] $\{7,5,4,1\}$ è un cammino aumentante

b) Per quali valori del costo dell'arco $(4,5)$ lo pseudoflusso risulta minimale?

[I] $c_{45} \neq -1$ [II] $c_{45} \geq 0$ [III] $c_{45} \leq 0$

c) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I $\{5,3\}$ II $\{5,6,3\}$ III $\{1,2,3\}$

d) Qual è la massima quantità di flusso che si può inviare lungo il cammino aumentante $\{5,4,1,2,3\}$?

I 3 II 1 III 4

e) Come bisogna modificare il bilancio dei nodi e/o il costo degli archi in modo che lo pseudoflusso diventi un flusso ammissibile di costo minimo? Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 3x_2 & \leq & 3 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \min & 2y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & + & 4y_4 & & & & \\ & & & y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & - & y_5 & = & 1 \\ & y_1 & - & 3y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3,5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (1,1)$ è una direzione ammissibile per $x = (0,1)$ e di crescita per (P)

B $x = (1,2)$ e $y = (2,0,-1,0,0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari

b) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla seconda iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (1,-2)$, $\bar{\lambda} = 8/7$ II $\xi = (1,0)$, $\bar{\lambda} = 8$ III $\xi = (1,0)$, $\bar{\lambda} = 0$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (1,2)$, $\bar{y} = (2,0,-1,0,0)$ II $\bar{x} = (1,2)$, $\bar{y} = (1/2,0,0,1/2,0)$ III $\bar{x} = (0,1)$, $\bar{y} = (0,0,1,0,2)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_2 + y_4 + y_5 \leq 1$ II $y_2 + y_5 \geq 0$ III $y_2 + y_3 + y_5 \geq 1$

e) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (P) in modo tale che il problema (D) abbia un'unica soluzione ottima. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si considerino il problema dello zaino

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \max & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 10x_4 & & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 10x_4 & \leq & 13 \\ & \multicolumn{9}{l}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0,1\}} \end{array}$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita in ordine crescente di rendimento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazione sono corrette?

A L'ordinamento delle variabili per rendimento decrescente è x_4, x_3, x_2, x_1

B La soluzione ammissibile di partenza è $(1, 1, 1, 0)$

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 13, v_S = 16$ II $v_I = 12, v_S = 16$ III $v_I = 10, v_S = 14$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla seconda ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ammissibilità II nessuno III 1 per inammissibilità

d) Quanti nodi (esclusa la radice) è necessario visitare prima di trovare e certificare una soluzione ottima?

I 6 II 5 III 4

e) Modificare il beneficio di un solo oggetto in modo tale che la soluzione ammissibile di partenza sia ottima. Giustificare la scelta effettuata.