

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

Per ciascun esercizio si individuino l'eventuale correttezza delle affermazioni a), l'unica risposta corretta alle domande b), c), d), e) e si risponda alle domande finali f).

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$(P) \quad \begin{array}{rcll} \max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

a) La seguente affermazione è corretta?

A $x = (2, 3)$ e $y = (0, 0, \alpha, \beta)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari se e solo se $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$

b) Qual è l'insieme di tutte le coppie di valori per cui la soluzione $x = (2, 3)$ è ottima per (P)?

I $\{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$ II $\{(\alpha, \beta) : \alpha \geq -\beta, \beta \geq 0\}$ III $\{(\alpha, \beta) : \beta \geq |\alpha|\}$

c) Qual è l'insieme di tutte le coppie di valori per cui la soluzione $y = (0, 0, \alpha, \beta)$ è ottima per (D)?

I $\{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 0, \beta \geq 0\}$ II $\{(\alpha, \beta) : \alpha \geq -\beta, \beta \geq 0\}$ III $\{(\alpha, \beta) : \beta \geq |\alpha|\}$

d) Se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(2, 3)\}$ II $\{(t, 3t-1) : t \leq 2\}$ III $\{(t, t+1) : 1 \leq t \leq 2\}$

e) Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I $\{(0, 0, -1, 0)\}$ II $\{(0, 0, t, 0) : 0 \leq t \leq 1\}$ III \emptyset

f) A Si scelgano valori per α e β tali che esistano infinite soluzioni ottime ma $x = (2, 3)$ sia l'unica soluzione ottima di base. Giustificare la scelta effettuata.

B Individuare una direzione ammissibile per $x = (1, 2)$ che sia anche di crescita quando $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Giustificare la scelta effettuata.

2) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P) \quad \begin{array}{rcll} \max & -2x_1 & + & x_2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & -3x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 3 \end{array} \quad (D) \quad \begin{array}{rcll} \min & y_1 & - & y_2 & + & 5y_3 & + & 2y_4 & + & 3y_5 \\ & -y_1 & - & 3y_2 & + & y_3 & + & y_4 & & & = & -2 \\ & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & & + & y_5 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplexso Primale a partire dalla base $B = \{4, 5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A La direzione $\xi = (-1, -1)$ è ammissibile per $x = (1, 2)$

B Le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo sono $\bar{x} = (2, 3)$ e $\bar{y} = (0, 0, 0, -2, 1)$

b) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (0, -1), \bar{\lambda} = +\infty$ II $\xi = (-1, 0), \bar{\lambda} = 0$ III $\xi = (-1, -1), \bar{\lambda} = 1$

c) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall’algoritmo?

- I $\bar{x} = (2, 3), \bar{y} = (1/2, 1/2, 0, 0, 0)$ II $\bar{x} = (1, 2), \bar{y} = (2, 0, 0, 0, 0)$ III $\bar{x} = (1, 2), \bar{y} = (1/2, 1/2, 0, 0, 0)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima \bar{y} trovata alla domanda precedente?

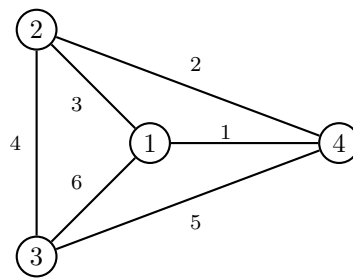
- I $y_1 + y_2 \geq 2$ II $y_3 + y_4 + y_5 \geq 2$ III $y_4 + y_5 \geq 1$

e) Qual è il cono delle direzioni di recessione della regione ammissibile di (P) ?

- I $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 \leq 3\xi_1, \xi_1 \leq 0\}$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 \leq \xi_1, \xi_1 \leq 0\}$ III $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_2 \leq -|\xi_1|\}$

f) Scegliere un differente vettore di termini noti per il problema (D) in modo tale che (P) risulti superiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

3) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo “Branch and Bound”: la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 1, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 1-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l’albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A L’arco $(1, 3)$ appartiene alla soluzione ammissibile di partenza

b) Quali archi appartengono all’1-albero di costo minimo?

- I $(1, 4), (3, 4)$ II $(1, 2), (1, 3)$ III $(2, 3), (2, 4)$

c) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall’algoritmo al nodo radice?

- I $v_I = 10, v_S = 13$ II $v_I = 13, v_S = 10$ III $v_I = 13, v_S = 13$

d) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

- I 1 per $v_I(P_i) > v_S(P_i)$ II nessuno III 1 per inammissibilità

e) Quanti nodi vengono chiusi alla terza ramificazione e per quale motivo?

- I 1 per ammissibilità II nessuno III 2 per $\begin{cases} \text{inammissibilità} \\ \text{ammissibilità} \end{cases}$

f) Scambiare il costo di 2 archi in modo tale che l’algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.