RICERCA OPERATIVA (a.a. 2022/23)

1) Grazie alle ingenti risorse del *Piano Nazionale Spreco Soldi* il neodirettore del Dipartimento di *Pseudofomatica*, professor *Vittorio Umbrella*, dispone di un finanziamento di C cattedre d'oro per assumere nuovi docenti delle m categorie previste dal Ministero. L'assunzione di un docente di categoria j comporta una spesa di c_j cattedre d'oro, mentre le regole del piano impongono che le assunzioni per ciascuna categoria non possano superare il 40% del numero totale di assunzioni. Il dipartimento è suddiviso in n aree pseudoscientifiche e servono almeno d_i docenti di ciascuna area i per coprire l'incremento di esigenze didattiche. Il direttore ha stimato che l'assunzione di un docente di categoria j nell'area i ottennerà a_{ij} voti favorevoli dei componenti del dipartimento.

Aiuta il direttore a predisporre un piano di assunzioni, formulando in termini di P.L.I. il problema di decidere quanti e quali docenti assumere nel rispetto delle regole del *PNSS* soddisfacendo le esigenze didattiche con l'obiettivo di spendere almeno il 90% del finanziamento e di massimizzare il minimo numero di voti favorevoli che ciascuna proposta otterrà.

Scelte le famiglia di variabili

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il piano prevede l'assunzione di docenti di categoria } j \text{ nell'area } i, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m,$$

$$x_{ij} = \text{numero di docenti di categoria } j \text{ da assumere nell'area } i,$$

parte della formulazione è data dalla funzione obiettivo e dai vincoli riportati sotto:

$$\max \quad v$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq d_i \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\}, \; x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m,$$

dove la variabile ausiliaria v fornisce un'approssimazione inferiore del minimo numero di voti favorevoli per ciascuna tipologia di proposta.

Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

- [A] $x_{ij} \leq C y_{ij} \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$
- [B] $c_j x_{ij} y_{ij} \leq C \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$
- [C] $9\,C \leq 10 \sum_{j=1}^{m} c_j \Big(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \Big) \leq 10\,C$
- [D] $c_j x_{ij} \leq C y_{ij} \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$
- [E] $0.9\,C \leq \sum_{j=1}^{m} c_j \Big(\sum_{i=1}^{n} y_{ij} \Big) \leq C$
- [F] $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 0.4 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \quad i = 1, \ldots, n$
- [G] $v \leq a_{ij} y_{ij} + \Big(\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{k\ell} \Big)(1 - y_{ij}) \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$
- [H] $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 0.4 \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \quad j = 1, \ldots, m$
- [I] $v \leq a_{ij} y_{ij} \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$
- [J] $v \leq a_{ij} x_{ij} \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m$

2) I venti di guerra con l'*Impero Klingon* hanno spinto il governo della *Federazione dei Pianeti Uniti* a stanziare C crediti federali per la realizzazione di basi di intercettazione spaziale a protezione degli n pianeti ritenuti più esposti al rischio di attacchi. I tecnici dell'*Ammiraglio Bill*, comandante supremo della *Flotta Astrale*, hanno individuato m satelliti artificiali idonei ad ospitare le basi. Le tecnologie più avanzate disponibili permettono ad una base di proteggere un pianeta distante al più D^+ secondi-luce e più pianeti contemporaneamente se la distanza $d_{k\ell}$ tra ciascuna coppia (k, ℓ) di questi fosse non superiore a D^-. Una base sul satellite j sarebbe in grado di proteggerne fino a p_j, il costo della sua realizzazione ammonta a c_j crediti federali mentre le attrezzature necessarie alla protezione del pianeta i costano v_i crediti e la distanza massima del satellite j dal pianeta i è s_{ij} secondi-luce.

Aiuta l'ammiraglio ad elaborare un piano di costruzione delle basi e protezione dei pianeti: si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere su quali satelliti costruire basi e quali pianeti proteggere da ciascuna di esse nel rispetto dello stanziamento assegnato e dei vincoli tecnologici realizzando al più k basi con l'obiettivo di massimizzare il numero di pianeti protetti ma garantendo comunque la presenza di una base a distanza di potenziale protezione da ciascun pianeta.

Schematizzate le distanza massime tra pianeti e satelliti attraverso la matrice di dati di coefficienti

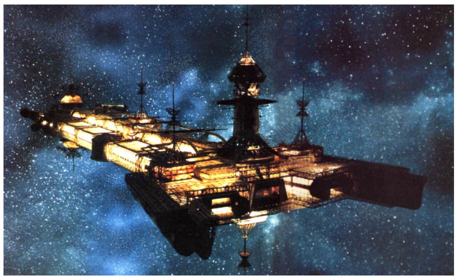
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } s_{ij} \leq D^+, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m,$$

e scelte le famiglie di variabili

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se viene costruita una base sul satellite } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m,$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il pianeta } i \text{ viene protetto dalla base sul satellite } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:



$$\begin{aligned} &\max \\ &\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \leq 1 && i = 1, \ldots, n \\ &\sum_{j=1}^{m} y_j \leq k \\ &y_j \in \{0,1\}, \; x_{ij} \in \{0,1\} && i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

- [A] $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij}$ (funzione obiettivo)
- [B] $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j$ (funzione obiettivo)
- [C] $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = 1 \quad i = 1, \ldots, n$
- [D] $\sum_{j=1}^{m} \left(c_j y_j + \sum_{i=1}^{n} v_i a_{ij} x_{ij} \right) \leq C$
- [E] $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \left(c_j y_j + v_i a_{ij} x_{ij} \right) \leq C$
- [F] $d_{k\ell}(a_{kj} x_{kj} + a_{\ell j} x_{\ell j} - 1) \leq D^- \quad j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad \ell = k+1, \ldots, n$
- [G] $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq p_j y_j \quad j = 1, \ldots, m$
- [H] $d_{k\ell}(a_{kj} x_{kj} + a_{\ell j} x_{\ell j}) \leq D^- y_j \quad j = 1, \ldots, m, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad \ell = k+1, \ldots, n$

$\boxed{\text{I}}$ $\sum_{j=1}^{m} p_j y_j \leq \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ij} \quad i = 1, \ldots, n$

$\boxed{\text{J}}$ $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \geq 1 \quad i = 1, \ldots, n$