RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda $a)$ (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande $b), c), d)$ e si risponda alla domanda finale $e)$.

1) In partenza per il tour delle fiere *Uomo del Futuro* nei pianeti della *Grande Nebulosa*, *Eta Beta* intende portare con sé più copie dei suoi n articoli supertecnologi, più precisamente almeno q_i^- e al più q_i^+ copie di ciascun articolo i. A questo scopo può utilizzare l'ultima versione del suo fantasmagorico *TiBag*, uno zaino che può venir configurato attivando fino a m comparti tridimensionali con volume apparentemente trascurabile ma capacità pari a M litri ciascuno.

Considerando che ciascun articolo i è arbitrariamente deformabile ma di volume invariabile v_i e peso p_i, aiuta Eta Beta a preparare il suo zaino, formulando in termini di P.L.I. il problema di decidere quante copie di ciascun articolo mettere nel TiBag nel rispetto delle capacità dei comparti equilibrandone il peso, ovvero minimizzando la massima differenza tra il peso di ciascuno dei comparti utilizzati.

Scelte le famiglia di variabili

$$z_j = \begin{cases} 1, & \text{se il comparto } j \text{ del TiBag viene utilizzato,} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m,$$

$$x_{ij} = \text{numero di copie dell'articolo } i \text{ inserite nel comparto } j \text{ del TiBag,}$$

parte della formulazione è data dalla funzione obiettivo e dai vincoli riportati sotto:

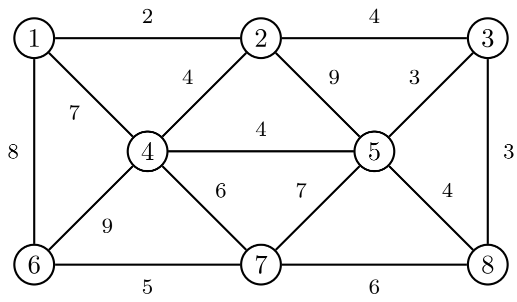
$$\begin{array}{ll} \min & v \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq q_i^- \qquad i = 1, \dots, n, \\ & z_j \in \{0,1\}, \; x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m, \end{array}$$

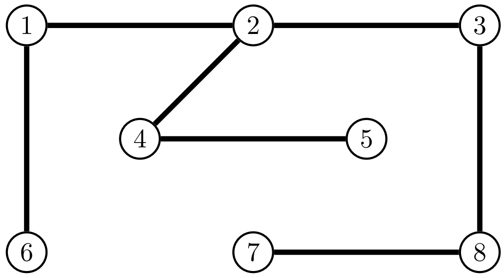
dove la variabile ausiliaria v fornisce un'approssimazione superiore della massima differenza tra i pesi dei comparti utilizzati.

Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

- A $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq q_i^+ \quad i = 1, \dots, n,$
- B $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq q_i^+ z_j \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$
- C $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \leq M z_j \quad j = 1, \dots, m,$
- D $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij} \leq M z_j \quad j = 1, \dots, m,$
- E $\displaystyle v \geq z_h z_k \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i (x_{ih} - x_{ik}) \Big) \quad h, k = 1, \dots, m, \; h \neq k$
- F $\displaystyle v \geq \sum_{i=1}^{n} p_i (x_{ih} - x_{ik}) \quad h, k = 1, \dots, m, \; h \neq k$
- G $\displaystyle v \geq \sum_{i=1}^{n} v_i (x_{ih} - x_{ik}) \quad h, k = 1, \dots, m, \; h \neq k$
- H $\displaystyle v \geq \sum_{i=1}^{n} p_i (x_{ih} - x_{ik}) - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i^+ (2 - z_h - z_k), \quad h, k = 1, \dots, m, \; h \neq k$

2) Si considerino il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra e l'albero riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ Sostituendo l'arco $(2,3)$ con l'arco $(5,8)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

$\boxed{\text{B}}$ L'arco $(2,3)$ soddisfa la condizione di ottimalità per tagli

b) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

$\boxed{\text{I}}$ $(1,4)$ $\boxed{\text{II}}$ $(3,5),(6,7)$ $\boxed{\text{III}}$ $(3,5),(5,8)$

c) Quali archi bisogna sostituire nell'albero con quelli individuati al punto b) per ottenere un albero di copertura di costo minimo?

$\boxed{\text{I}}$ $(2,4)$ $\boxed{\text{II}}$ $(3,8),(4,5)$ $\boxed{\text{III}}$ $(1,6),(4,5)$

d) Quanti alberi di copertura di costo minimo esistono nel grafo?

$\boxed{\text{I}}$ 2 $\boxed{\text{II}}$ 3 $\boxed{\text{III}}$ 4

e) Modificare il costo di un solo arco dell'albero a destra in modo tale che esista un unico albero di copertura di costo minimo. Giustificare la risposta

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$
(P) \quad \begin{array}{lrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & \alpha \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 2
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ $(2,\alpha-2)$ è una soluzione primale di base

$\boxed{\text{B}}$ Se $\bar{x} = (2,\alpha-2)$ e $\bar{y} = (1,0,0,1,0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari, allora $3 \leq \alpha \leq 4$

b) Per quali valori di α la soluzione $\bar{x} = (2,\alpha-2)$ è ottima per (P)?

$\boxed{\text{I}}$ nessuno $\boxed{\text{II}}$ $3 \leq \alpha \leq 4$ $\boxed{\text{III}}$ $\alpha \geq 4$

c) Se $\alpha = 3$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(2,1)\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{(1,2)\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\{(t,3-t) : 1 \leq t \leq 2\}$

d) Se $\alpha = 4$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

| I | (D) è vuoto | II | $\{(t, 0, 0, 2-t, 1-t) : 0 \leq t \leq 1\}$ | III | $\{(1, 0, 0, 1, 0)\}$ |

e) Scegliere una valore per α in modo tale che $\hat{x} = (\alpha - 2, 2)$ sia l'unica soluzione ottima di (P). Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P) \quad \begin{array}{rrcrcr}
\max & -2x_1 & - & x_2 & & \\
 & -x_1 & & & \leq & 5 \\
 & & & -x_2 & \leq & 7 \\
 & -3x_1 & - & x_2 & \leq & 16 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 8
\end{array}
\qquad
(D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr}
\min & 5y_1 & + & 7y_2 & + & 16y_3 & + & 8y_4 & & \\
 & y_1 & & & + & y_3 & + & y_4 & = & 2 \\
 & & & y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $\xi = (2, 1)$ è una direzione di recessione della regione ammissibile di (P)

B $x = (5, 7)$ e $y = (2, 1, 0, 0)$ sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo

b) Quali sono gli indici entrante k ed uscente h nonché il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

| I | $k = 3$, $h = 1$, $\bar{\theta} = 2/3$ | II | $k = 4$, $h = 1$, $\bar{\theta} = 1/2$ | III | $k = 3$, $h = 2$, $\bar{\theta} = 1/2$ |

c) Qual è la soluzione ottima di (D) individuata dall'algoritmo?

| I | $\bar{y} = (1/2, 0, -1/2, 0)$ | II | $\bar{y} = (0, 0, 1, 0)$ | III | $\bar{y} = (0, 0, 1/2, 1/2)$ |

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

| I | $y_1 + y_2 \geq 1$ | II | $y_3 + y_4 \geq 1$ | III | $y_1 + y_2 \leq 1$ |

e) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (P) in modo tale che l'unica soluzione ottima di (P) resti ottima mentre la soluzione ottima di (D) individuata al punto c) non risulti più tale. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si considerino il problema dello zaino

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 14x_1 & + & 18x_2 & + & 16x_3 & + & 21x_4 & & \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 4x_4 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \in \{0,1\} & & & & & \end{array}$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita in ordine crescente di rendimento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazione sono corrette?

A L'ordinamento delle variabili per rendimento decrescente è x_1, x_2, x_3, x_4

B La soluzione ammissibile di partenza è $(1, 1, 2/5, 0)$

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 32, v_S = 38$ II $v_I = 32, v_S = 42$ III $v_I = 34, v_S = 42$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ammissibilità II nessuno III 1 per $v_S < v_I$

d) Quanti nodi (esclusa la radice) vengono visitati prima di trovare e certificare una soluzione ottima?

I 2 II 4 III 6

e) Modificare il beneficio di un solo oggetto in modo tale che l'algoritmo alla prima ramificazione chiuda esattamente un nodo. Giustificare la scelta effettuata.