RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/22)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Per prepararsi a contrastare le mire imperialiste della *Confederazione dei Regni degli Orchi Autarchici*, il Consiglio dei Ministri della *Repubblica dei Draghetti* ha previsto la costruzione di n nuove basi militari sul proprio territorio nonostante la contrarietà di una significativa parte della popolazione. I Ministeri della difesa e delle infrastrutture hanno individuato una località adatta in m aree di interesse strategico e stimato un costo di c_{ij} lapilluli di piombo per costruire la base i nell'area j. L'Istituto Nazionale dei Dati ha stimato un livello p_j di dissenso della popolazione dell'area j verso la presenza di una nuova base, mentre il Ministero dello sviluppo economico ha valutato un incremento di u_{ij} milioni della *Carbonella Interna Lorda* che la costruzione della base i porterebbe nella medesima area. Visto che il Ministero delle finanze ha messo a disposizione un budget di soli C lapilluli di piombo, il Consiglio ha deciso che dovranno essere costruite almeno k delle n basi previste ma garantendo un incremento della CIL non inferiore a U_j milioni in ciascuna delle aree j in cui verrà costruita una base.

Aiuta il *Primo Draghetto* a predisporre il piano per la costruzione delle basi, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quali basi costruire e in quali aree nel rispetto del finanziamento assegnato e di tutti i vincoli richiesti dal Consiglio con l'obiettivo di minimizzare il livello di dissenso complessivo della popolazione.

Scelta le famiglie di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se la base } i \text{ viene costruita nell'area } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m,$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se viene costruita una base nell'area } j, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, m,$$

parte della formulazione è data dai vincoli riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \min & & \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 & i = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \leq C & \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

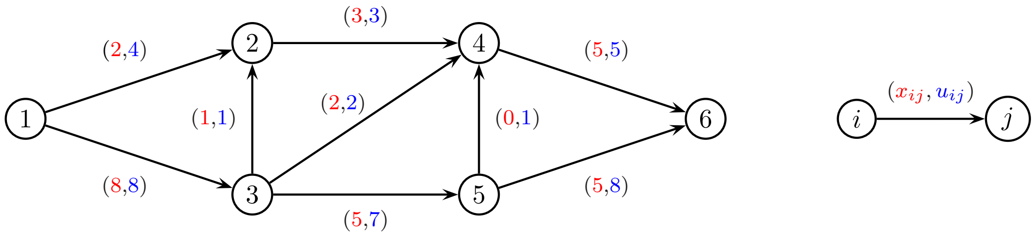
a) Selezionare tra le funzioni obiettivo ed i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

- [A] $\sum_{i=1}^{n} p_j x_{ij}$ (funzione obiettivo)
- [B] $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_j x_{ij}$ (funzione obiettivo)
- [C] $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq y_j \qquad j = 1, \ldots, m$
- [D] $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq y_j \qquad j = 1, \ldots, m$
- [E] $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_{ij} \geq \sum_{j=1}^{m} U_j y_j$
- [F] $\sum_{i=1}^{n} u_{ij} x_{ij} \geq U_j y_j \qquad j = 1, \ldots, m$

G $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq k$

H $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq k \qquad j = 1, \ldots, m$

2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso nel taglio $(\{1,2\},\{3,4,5,6\}$ è 12.

B La capacità del taglio $(\{1,2,4\},\{3,5,6\})$ è 13.

b) Qual è un cammino aumentante?

I $\{1,3,5,6\}$ II $\{1,2,3,5,6\}$ III non ne esistono

c) Quale dei seguenti è un taglio di capacità minima?

I $(\{1,2\},\{3,4,5,6\})$ II $(\{1,2,3\},\{4,5,6\})$ III $(\{1,2,4\},\{3,5,6\})$

d) Aumentando la capacità dell'arco $(3,2)$ a $u_{32} = 3$, di quanto aumenta il valore del flusso massimo?

I 2 II 1 III 0

e) Modificare la capacità di archi incidenti nel nodo 3 in modo tale che il flusso riportato in figura sia massimo. Giustificare la risposta.

3) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$
(P) \quad \begin{array}{rrcrcr}
\max & \alpha x_1 & - & x_2 & & \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Se $\alpha > 0$, allora (P) è superiormente illimitato

B $\bar{x} = (1,0)$ e $\bar{y} = (0,0,(1-\alpha)/2,(1+\alpha)/2)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari

b) Se $\alpha = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(2,1)\}$ II $\{(t, t-1) : 1 \leq t \leq 2\}$ III $\{(0,1)\}$

c) Se $\alpha = -1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

$\boxed{\text{I}}$ $\{(0,0,(1-t),(1+t))/2 : -1 \leq t \leq 1\}$ $\boxed{\text{II}}$ (D) è inferiormente illimitato $\boxed{\text{III}}$ $\{(0,0,1,0)\}$

d) Qual è l'insieme delle direzioni di recessione del poliedro?

$\boxed{\text{I}}$ $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : -\xi_2 \leq \xi_1 \leq \xi_2\}$ $\boxed{\text{II}}$ $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 = 0, \xi_2 \geq 0\}$ $\boxed{\text{III}}$ $\emptyset$

e) Scegliere una valore per α in modo tale che $\bar{x} = (2,1)$ sia l'unica soluzione ottima di (P). Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P) \quad
\begin{array}{rrrrl}
\max & & -x_2 & & \\
 & -x_1 & & \leq & 0 \\
 & x_1 & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - \; x_2 & \leq & -1 \\
 & x_1 & - \; x_2 & \leq & 1 \\
 & & - \; x_2 & \leq & 0
\end{array}
\qquad
(D) \quad
\begin{array}{rrrrrrrl}
\min & & 2y_2 & - \; y_3 & + \; y_4 & + & & \\
 & -y_1 & + \; y_2 & - \; y_3 & + \; y_4 & & = & 0 \\
 & & & y_3 & + \; y_4 & + \; y_5 & = & 1 \\
 & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{2,3\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ La regione ammissibile di (P) è l'involucro convesso dei punti $(0,1), (1,0), (2,1)$

$\boxed{\text{B}}$ $x = (2,1)$ e $y = (0,-1,0,1,0)$ sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo

b) Quali sono gli indici entrante k ed uscente h individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

$\boxed{\text{I}}$ $k = 4$, $h = 2$ $\boxed{\text{II}}$ $k = 5$, $h = 2$ $\boxed{\text{III}}$ $k = 4$, $h = 3$

c) Quali sono la direzione di decrescita d e il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

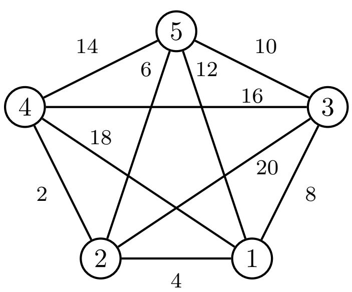
$\boxed{\text{I}}$ $d = (0,-2,-1,1,0)$, $\bar{\theta} = 1/2$ $\boxed{\text{II}}$ $d = (0,2,1,1,0)$, $\bar{\theta} = 1/2$ $\boxed{\text{III}}$ $d = (0,-2,-1,1,0)$, $\bar{\theta} = 1$

d) Qual è la soluzione ottima di (D) individuata dall'algoritmo?

$\boxed{\text{I}}$ $\bar{y} = (0,1,1,0,0)$ $\boxed{\text{II}}$ $\bar{y} = (0,1/2,1/2,0,0)$ $\boxed{\text{III}}$ $\bar{y} = (0,0,1/2,1/2,0)$

e) Modificare al più un termine noto per la regione ammissibile del problema duale (D) in modo tale che il problema primale (P) risulti superiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l'algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 4, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l'4-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(2, 5)$ appartiene al 4-albero di costo minimo

B Il 4-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{24} = 0$ è un ciclo hamiltoniano

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 32, v_S = 40$ II $v_I = 34, v_S = 34$ III $v_I = 34, v_S = 38$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per otttimalità ($v_I \geq v_S$) II nessuno III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 3: x_{24}, x_{25}, x_{12} II 3: x_{24}, x_{12}, x_{25} III 2: x_{24}, x_{12}

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.