RICERCA OPERATIVA (a.a. 2021/21)

Per ciascun esercizio si individuino l'eventuale correttezza delle affermazioni $a)$, l'unica risposta corretta alle domande $b), c), d), e)$ e si risponda alle domande finali $f)$.

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$
(P)\qquad \begin{array}{rrcrcl}
\max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & & & -x_2 & \leq & 0
\end{array}
$$

a) La seguente affermazione è corretta?

A $x = (2,1)$ e $y = ((\alpha - \beta)/2, 0, 0, (\alpha + \beta)/2, 0)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari

b) Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = (2,1)$ è ottima per (P)?

I $\alpha = -\beta,\ \beta > 0$ II $\alpha \geq \beta$ III $\alpha \geq |\beta|$

c) Per quale coppia di valori la soluzione $x = (1,2)$ è ottima per (P)?

I nessuna II $\alpha = 1,\ \beta = 1$ III $\alpha = 1,\ \beta = -1$

d) Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(0,3)\}$ II $\{(t, 3-t)\ :\ 0 \leq t \leq 2\}$ III $\{(2,1)\}$

e) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (D)?

I $\{(-1/2, 0, 0, 1/2, 0)\}$ II $\{(1/2, 0, 0, 1/2, 0)\}$ III $\{(0, 0, 1/2, 1/2, 0)\}$

f) A Si scelgano valori per α e β tali che $\bar{y} = (1,0,0,0,0)$ sia una soluzione ottima per (D). Giustificare la scelta effettuata.

B Eliminare un solo vincolo di (P) in modo tale che il problema risulti superiormente illimitato per $\alpha = \beta = 1$. Giustificare la scelta effettuata.

2) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P)\qquad \begin{array}{rrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & 2x_2 & \leq & 7 \\
 & -2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & & -x_2 & \leq & 0
\end{array}
\qquad\qquad
(D)\qquad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & 2y_1 & + & 7y_2 & + & 7y_3 & & & & & & \\
 & y_1 & & & - & 2y_3 & - & y_4 & & & = & 2 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_3 & & & - & y_5 & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{2,3\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A La regione ammissibile di (P) è l'involucro convesso di $(0,0), (2,0), (0,3), (5,3)$

B La direzione $\xi = (1,-1)$ è ammissibile per $x = (0,3)$

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 7/2)$, $\bar{y} = (0, 3/2, -1, 0, 0)$ II $\bar{x} = (0, 7/2)$, $\bar{y} = (0, 3/2, 1, 0, 0)$ III $\bar{x} = (0, 3/2)$, $\bar{y} = (3/2, -1, 0, 0)$

c) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $\xi = (1/2, 0)$, $\bar{\lambda} = 0$ II $\xi = (1, -1)$, $\bar{\lambda} = +\infty$ III $\xi = (1/2, 0)$, $\bar{\lambda} = 11$

d) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 7/2)$, $\bar{y} = (-2, 3/2, 0, 0, 0)$ II $\bar{x} = (11/2, 7/2)$, $\bar{y} = (0, 0, 0, 2, 3/2)$ III $\bar{x} = (11/2, 7/2)$, $\bar{y} = (2, 3/2, 0, 0, 0)$

e) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata alla domanda precedente?

I $y_4 + y_5 \leq 1$ II $y_4 + y_5 \geq 1$ III $y_1 + y_2 \geq 1$

f) Scegliere una diversa funzione obiettivo per (P) in modo tale che la soluzione ottima $\bar{x}$ individuata alla domanda d) resti ottima ma non sia l'unica soluzione ottima del problema. Giustificare la scelta effettuata.

3) Si considerino il problema dello zaino

$$\begin{array}{llllllllll} \max & 16x_1 & + & 21x_2 & + & 23x_3 & + & 19x_4 & & \\ & 6x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \in \{0,1\} & & & & & \end{array}$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) La seguente affermazione è corretta?

A La soluzione ottima del rilassamento continuo del problema è $(0, 1, 1, 1)$

b) Qual è l'ordinamento delle variabili per rendimento decrescente?

I x_1, x_3, x_2, x_4 II x_2, x_4, x_3, x_1 III x_4, x_2, x_3, x_1

c) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 42, v_S = 44$ II $v_I = 40, v_S = 44$ III $v_I = 40, v_S = 42$

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 2: x_4, x_3 II 3: x_3, x_1, x_2 III 1: x_3

e) Qual è la soluzione ottima del problema?

I $(0, 1, 1, 1)$ II $(0, 0, 1, 1)$ III $(0, 1, 0, 1)$

f) Modificare il peso di un solo oggetto in modo tale che l'algoritmo termini direttamente alla radice. Giustificare la scelta effettuata.