

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda a) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande b), c), d) e si risponda alla domanda finale e).

1) Per rigenerare l'economia disastata da anni di terribili eruzioni vulcaniche, il consiglio degli anziani saggi del *Regno dei Dragoni* ha individuato m progetti da realizzare, che sono già stati catalogati in n aree tematiche di interesse. Ciascun progetto j costa c_j lapilluli d'oro e ne porterebbe r_j come ritorno atteso. La *Confederazione delle Terre Démoniache* intende mettere a disposizione del regno M lapilluli di finanziamento a precise condizioni: in ciascuna area i devono venire attivati almeno ℓ_i progetti e lo scostamento percentuale della spesa totale dal valore di riferimento T_i non deve superare la soglia h_i ; inoltre, la spesa per una singola area tematica non può superare il doppio di quella per ciascuna delle altre.

Aiuta il *Dragone Pianificatore* a predisporre il piano di spesa da proporre alla confederazione, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quali progetti selezionare nel rispetto del finanziamento assegnato e di tutti i vincoli richiesti con l'obiettivo di massimizzare il ritorno atteso complessivo dei progetti selezionati.

Sceita la famiglia di variabili

$$x_j = \begin{cases} 1, & \text{se il progetto } j \text{ viene selezionato} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, m$$

ed indicato con $S(i)$ l'insieme di tutti i possibili progetti relativi all'area i , parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^m r_j x_j \\ & \sum_{j \in S(i)} c_j x_j - T_i \leq T_i h_i \quad i = 1, \dots, n \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\sum_{j=1}^m c_j x_j \leq M$

B $\sum_{j=1}^m c_j x_j = M$

C $\sum_{j \in S(i)} c_j x_j \geq \ell_i \quad i = 1, \dots, m$

D $\sum_{j \in S(i)} x_j \geq \ell_i \quad i = 1, \dots, m$

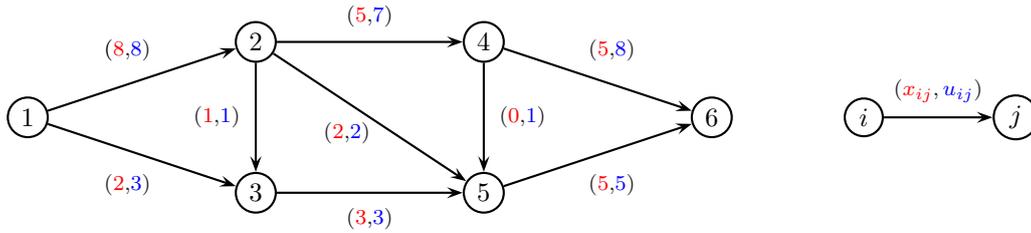
E $T_i - \sum_{j \in S(i)} c_j x_j \leq T_i h_i \quad i = 1, \dots, n$

F $\sum_{j \in S(h)} c_j x_j \leq 2 \sum_{j \in S(k)} c_j x_j \quad h = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n, k \neq h$

G $\sum_{j \in S(h)} c_j x_j \leq 2 \sum_{j \in S(k)} c_j x_j \quad h = 1, \dots, n-1, k = h+1, \dots, n$

H $\sum_{j \in S(h)} c_j x_j \geq 2 \sum_{j \in S(k)} c_j x_j \quad h = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n, k \neq h$

2) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso riportato in figura nel taglio $(\{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\})$ è 13.

B La capacità del taglio $(\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$ è 11.

b) Quale dei seguenti è un cammino aumentante

I $\{1, 3, 5, 2\}$

II $\{1, 3, 2, 5, 4, 6\}$

III $\{1, 3, 2, 4, 6\}$

c) Qual è un taglio di capacità minima?

I $(\{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6\})$

II $(\{1\}, \{2, 3, 4, 5, 6\})$

III $(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$

d) Diminuendo la capacità dell'arco $(5, 6)$ a $u_{56} = 4$, di quanto diminuisce il valore del flusso massimo?

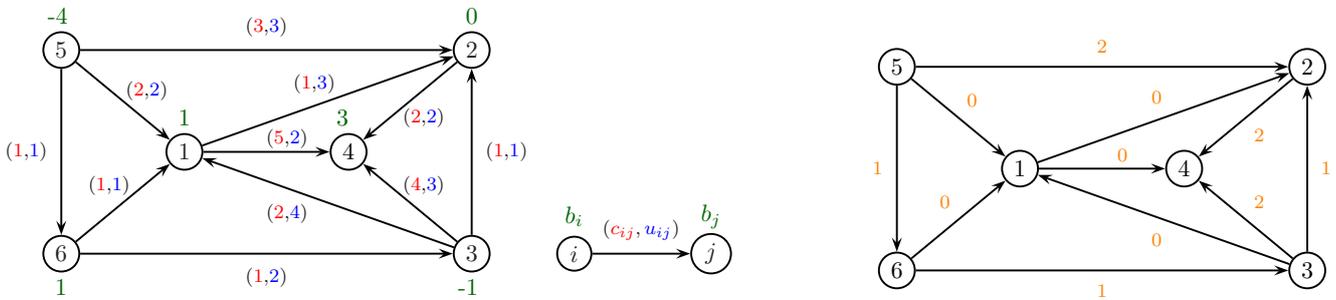
I 3

II 1

III 0

e) Quali capacità è sufficiente modificare (e come) affinché il flusso in figura sia massimo? Giustificare la risposta.

3) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il vettore degli sbilanciamenti è $e_x = (-1, 1, -1, 1, 1, -1)$ con sbilanciamento complessivo $g(x) = 4$

B Lo pseudoflusso è minimale

b) Per quali valori del costo dell'arco $(3, 2)$ lo pseudoflusso risulta minimale?

I $c_{32} \geq 1$

II $c_{32} \leq 1$

III nessuno

c) Qual è la massima quantità di flusso che si può inviare lungo il cammino aumentante $\{4, 3, 1\}$?

I $\theta = 1$

II $\theta = 0$

III $\theta = 3$

d) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I {1, 4, 2, 5}

II {4, 3, 1}

III {4, 3, 6, 5, 1}

e) Come bisogna modificare il bilancio dei nodi e/o il costo degli archi in modo che lo pseudoflusso diventi un flusso ammissibile di costo minimo? Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$\begin{array}{ll}
 \max & -x_1 - 2x_2 \\
 & x_1 \leq 0 \\
 & -x_2 \leq 0 \\
 (P) & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & -x_1 - x_2 \leq 1 \\
 & x_1 - x_2 \leq 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ll}
 \min & y_3 + y_4 \\
 (D) & y_1 + y_3 - y_4 + y_5 = -1 \\
 & -y_2 + y_3 - y_4 - y_5 = -2 \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0
 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l’algoritmo del Simpleso Primale a partire dalla base $B = \{1, 3\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $x = (0, 0)$ è una soluzione primale di base ammissibile

B $\xi = (-1, 1)$ è una direzione di crescita per (P)

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell’algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 1), \bar{y} = (1, 0, -2, 0, 0)$ **II** $\bar{x} = (0, 0), \bar{y} = (-1, 0, 2, 0, 0)$ **III** $\bar{x} = (0, 1), \bar{y} = (-1, 0, 2, 0, 0)$

c) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell’algoritmo?

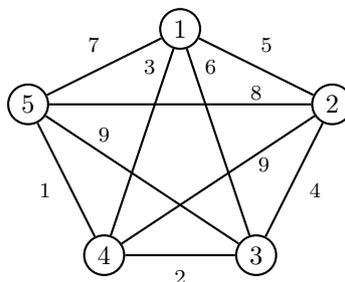
I $\xi = (-1, 1), \bar{\lambda} = 1$ **II** $\xi = (0, -1), \bar{\lambda} = 1$ **III** $\xi = (0, -1), \bar{\lambda} = 2$

d) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall’algoritmo?

I $\bar{x} = (0, 0), \bar{y} = (-1, 0, 2, 0, 0)$ **II** $\bar{x} = (-1, 0), \bar{y} = (0, 1, 0, 1, 0)$ **III** $\bar{x} = (-1, 0), \bar{y} = (0, 1, 1, 2, 0)$

e) Scegliere una funzione obiettivo per il problema primale (P) in modo tale che il problema risulti superiormente illimitato. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul seguente grafo



ed il seguente metodo “Branch and Bound”: la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta applicando l’algoritmo del nodo più vicino a partire dal nodo 5, la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando l’5-albero di costo minimo come rilassamento, la ramificazione viene eseguita per costo crescente degli archi, e l’albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'arco $(1, 4)$ appartiene al 5-albero di costo minimo

B Il 5-albero di costo minimo nel sottoproblema in cui $x_{45} = 0$ è un ciclo hamiltoniano

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 16, v_S = 20$

II $v_I = 17, v_S = 17$

III $v_I = 17, v_S = 19$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ottimalità ($v_I \geq v_S$)

II nessuno

III 1 per inammissibilità

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 3: x_{45}, x_{14}, x_{34}

II 3: x_{45}, x_{34}, x_{14}

III 2: x_{45}, x_{34}

e) Modificare il costo di 1 solo arco in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.