RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ogni esercizio si individuino le risposte corrette alla domanda *a*) (attenzione: potrebbero essere più di una oppure nessuna), per gli esercizi 2-5 anche l'unica risposta corretta alle domande *b*), *c*), *d*) e si risponda alla domanda finale *e*).

1) Per cercare di arginare più rapidamente la pandemia in corso, la Presidente delle *Confederazione dei Regni e delle Repubbliche Agenoree* ha convinto il colosso farmaceutico *HappyPills* ad autorizzare la produzione del vaccino negli stabilimenti delle principali 25 aziende farmaceutiche della confederazione. Per finanziare un piano unitario articolato in al più 52 settimane, il tesoriere confederale ha messo a disposizione un ingente fondo ad-hoc di S scudi. A ciascuna azienda è stato chiesto di avanzare le proprie richieste economiche e garantire conseguenti livelli di produzione: l'azienda i richiede un finanziamento di f_i scudi per avviare la produzione e c_{ih} scudi a dose nella settimana h del piano, per la quale garantisce fino a d_{ih} dosi.

Aiuta la Confederazione a predisporre il piano di produzione, formulando in termini di P.L.I. il problema di stabilire quali aziende farmaceutiche coinvolgere e quante dosi acquistare da ciascuna in ogni settimana del piano nel rispetto dello stanziamento totale disponibile in modo da minimizzare il numero di settimane necessario a disporre di almeno T dosi.

Scelte le famiglie di variabili

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{se l'azienda } i \text{ viene selezionata} \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$x_{ih} = \text{ numero di dosi acquistate dall'azienda } i \text{ nella settimana } h, \qquad i = 1,\dots,25,\ h = 1,\dots,52$$

$$z_h = \begin{cases} 1, & \text{se la settimana } h \text{ è necessaria per raggiungere la soglia } T \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{h=1}^{52} z_h \\ & \sum_{h=1}^{52} \sum_{i=1}^{25} x_{ih} \geq T \\ & y_i, z_h \in \{0,1\},\ x_{ih} \in \mathbb{Z}_+ \qquad i = 1,\dots,25,\ h = 1,\dots,52. \end{aligned}$$

a) Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

A $\quad x_{ih} \leq d_{ih} y_i z_h \quad i = 1,\dots,25,\ h = 1,\dots,52$

B $\quad x_{ih} \leq d_{ih} z_h \quad i = 1,\dots,25,\ h = 1,\dots,52$

C $\quad x_{ih} \leq T z_h \quad i = 1,\dots,25,\ h = 1,\dots,52$

D $\quad z_{h+1} \leq z_h \quad h = 1,\dots,51$

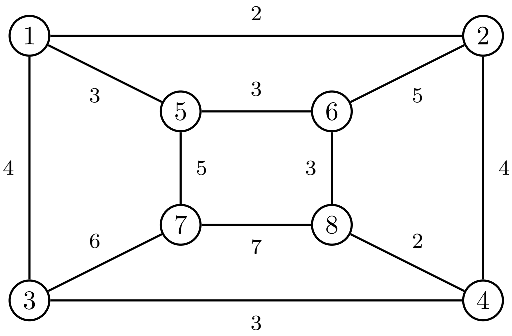
E $\quad \sum_{i=1}^{25} \Big(f_i y_i + \sum_{h=1}^{52} c_{ih} x_{ih} \Big) \leq S$

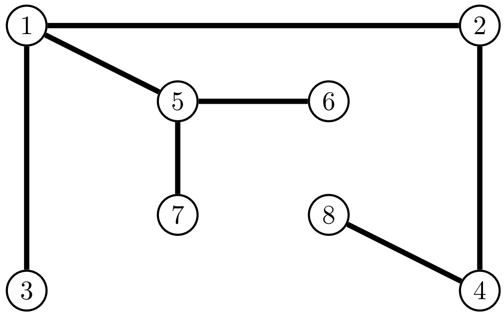
F $\quad \sum_{h=1}^{52} \sum_{i=1}^{25} \Big(f_i y_i + c_{ih} x_{ih} \Big) \leq S$

G $\quad \sum_{i=1}^{25} \sum_{h=1}^{52} x_{ih} \leq T$

H $\quad \sum_{h=1}^{52} x_{ih} \leq \Big(\sum_{h=1}^{52} d_{ih} \Big) y_i \quad i = 1,\dots,25$

2) Si considerino il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra e l'albero riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ Sostituendo l'arco $(1,5)$ con l'arco $(3,4)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato

$\boxed{\text{B}}$ Il costo dell'arco $(3,7)$ è rilevante per l'eventuale ottimalità dell'albero

b) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per cicli?

$\boxed{\text{I}}$ $(3,4),(6,8)$ $\boxed{\text{II}}$ nessuno $\boxed{\text{III}}$ $(3,4),(2,6)$

c) Quali archi non soddisfano la condizione di ottimalità per tagli?

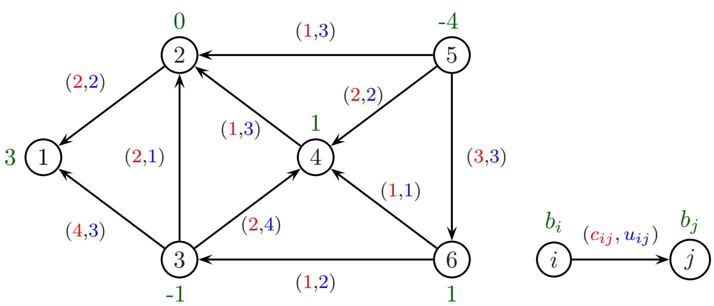
$\boxed{\text{I}}$ $(1,2),(2,4)$ $\boxed{\text{II}}$ $(1,3),(2,4)$ $\boxed{\text{III}}$ $(3,4),(5,7)$

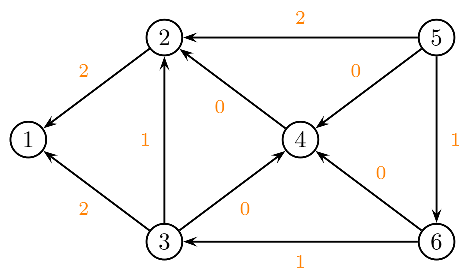
d) Qual è il costo di un albero di copertura di costo minimo?

$\boxed{\text{I}}$ 23 $\boxed{\text{II}}$ 21 $\boxed{\text{III}}$ 20

e) Modificare i costi di 2 archi. Quali archi e costi scegliere affinché l'albero a destra sia un albero di costo minimo? Si mantengano i costi modificati e si aggiunga l'arco $(7,6)$. Quale costo scegliere per il nuovo arco affinché l'albero a destra rimanga un albero di costo minimo?

3) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ Il vettore degli sbilanciamenti è $e_x = (1,1,-1,-1,1,-1)$ con sbilanciamento complessivo $g(x) = 3$

$\boxed{\text{B}}$ $\{6,3,1\}$ è un cammino aumentante di capacità 2

b) Per quali valori del costo dell'arco $(3,2)$ lo pseudoflusso risulta minimale?

$\boxed{\text{I}}$ $c_{32} \leq 2$ $\boxed{\text{II}}$ $c_{32} \geq 2$ $\boxed{\text{III}}$ $c_{32} \geq 1$

c) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I $\{5, 6, 3, 1\}$ II $\{1, 3, 4\}$ III $\{1, 3, 6, 5, 4\}$

d) Qual è la massima quantità di flusso che si può inviare lungo il cammino aumentante $\{1, 3, 4\}$?

I $\theta = 4$ II $\theta = 0$ III $\theta = 1$

e) Come bisogna modificare il bilancio dei nodi e/o il costo degli archi in modo che lo pseudoflusso diventi un flusso ammissibile di costo minimo? Giustificare la risposta.

4) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$
(P)\quad \begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & 5x_1 & + & 4x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & & & \leq & 2
\end{array}
\qquad
(D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl}
\min & y_1 & + & 2y_2 & + & 3y_3 & & & + & 2y_5 & & \\
 & y_1 & + & 5y_2 & & & + & y_4 & + & y_5 & = & 1 \\
 & -y_1 & + & 4y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & & & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{4, 5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $x = (2, -1)$ e $y = (0, 0, 0, 1, 1)$ sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo

B $\xi = (1, 0)$ è una direzione di crescita per (P)

b) Quali sono la direzione di decrescita d e il passo di spostamento $\bar{\theta}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

I $d = (1, 0, 0, 1/2, -3/2)$, $\bar{\theta} = 0$ II $d = (1, 0, 0, 1/2, -3/2)$, $\bar{\theta} = 1/3$ III $d = (0, 1, 0, -2, -3)$, $\bar{\theta} = 1/4$

c) Qual è la soluzione ottima di (D) individuata dall'algoritmo?

I $\bar{y} = (1/3, 0, 0, 2/3, 0)$ II $\bar{y} = (0, 1/6, 0, 1/6, 0)$ III $\bar{y} = (1, 0, 2, 0, 0)$

d) Qual è un piano di taglio (di Gomory) che esclude la soluzione ottima $\bar{y}$ trovata al punto precedente?

I $y_3 + y_5 \geq 2$ II $y_3 + y_5 \leq 2$ III $y_1 + y_3 \leq 1$

e) Modificare al più un coefficiente della funzione obiettivo per il problema duale (D) in modo tale che la soluzione ottima di (P) individuata dall'algoritmo sia non degenere ed allo stesso tempo la soluzione ottima $\bar{y}$ di (D) individuata al punto c) resti ottima. Giustificare la scelta effettuata.

5) Si considerino il problema dello zaino

$$
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\max & 17x_1 & + & 22x_2 & + & 16x_3 & + & 23x_4 & & \\
 & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & \leq & 8 \\
 & \multicolumn{9}{c}{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \{0, 1\}}
\end{array}
$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A L'ordinamento di rendimento decrescente delle variabili è x_4, x_3, x_2, x_1

B La soluzione ammissibile di partenza dell'algoritmo è $(0, 0, 1, 1)$

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

I $v_I = 33, v_S = 40$ II $v_I = 39, v_S = 42$ III $v_I = 41, v_S = 40$

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

I 1 per ammissibilità II nessuno III 1 per $v_S < v_I$

d) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

I 1: x_2, x_1 II 3: x_2, x_1, x_4 III 4: x_2, x_1, x_4, x_3

e) Modificare il peso di un solo oggetto in modo tale che l'algoritmo termini alla radice. Giustificare la scelta effettuata.