RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette alla domanda $a)$ (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna), l'unica risposta corretta alle domande $b), c), d), e)$ e si risponda alla domanda finale $f)$.

1) Si consideri il seguente problema di Programmazione Lineare ed il suo problema duale (D):

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & \alpha x_1 & + & \beta x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A Se $\alpha = 10$ e $\beta = 1$, allora $x = (2, 0)$ è una soluzione ottima di (P)
- B Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, allora $\xi = (2, -1)$ è una direzione di crescita ed è ammissibile per $x = (0, 0)$
- C $x = (0, 0)$ e $y = (0, 0, 0, -\beta, \beta - \alpha)$ soddisfano la condizione degli scarti complementari

b) Per quale famiglia di coppie di valori la soluzione $x = (0, 0)$ è ottima per (P)?

I $\alpha = \beta,\ \beta > 0$ II $\alpha \leq \beta \leq 0$ III nessuna

c) Per quale coppia di valori l'unica soluzione ottima di (P) è $x = (0, 0)$?

I $\alpha = -2,\ \beta = -1$ II $\alpha = -1,\ \beta = -1$ III $\alpha = 1,\ \beta = 1$

d) Se $\alpha = 1$ e $\beta = 1$, qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime di (P)?

I $\{(3, 0)\}$ II $\{(t, 3 - t) \ : \ 2 \leq t \leq 3\}$ III $\{(1, 2)\}$

e) Qual è l'insieme delle direzioni ammissibili per $x = (2, 1)$?

I $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : 2\xi_2 \leq \xi_1 \leq -\xi_2\}$ II $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 + \xi_2 \leq 0\}$ III $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : \xi_1 \geq 2\xi_2\}$

f) Scegliere α e β in modo tale che $x = (2, 1)$ sia l'unica soluzione ottima di (P). Giustificare la risposta.

2) Si consideri la seguente coppia (asimmetrica) di problemi duali di Programmazione Lineare

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & \leq & 3 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array} \qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \min & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & & & & & & \\ & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & - & y_4 & & & = & 1 \\ & -y_1 & & & + & y_3 & & & - & y_5 & = & 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4, & & y_5 & \geq & 0 \end{array}$$

e la loro risoluzione tramite l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{4, 5\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A La regione ammissibile di (P) è l'involucro convesso di $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(3, 0)$, $(3, 5)$
- B La direzione $\xi = (0, 1)$ è una direzione di recessione per la regione ammissibile di (P)
- C $B = \{1, 3\}$ è una base

b) Quali sono le soluzioni di base individuate alla prima iterazione dell'algoritmo?

| I | $\bar{x} = (0,0)$, $\bar{y} = (0,0,0,1,2)$ | II | $\bar{x} = (3,0)$, $\bar{y} = (1,0,0,0,-3)$ | III | $\bar{x} = (0,0)$, $\bar{y} = (0,0,0,-1,-2)$ |

c) Quali sono la direzione di crescita ξ e il passo di spostamento $\bar{\lambda}$ individuati alla prima iterazione dell'algoritmo?

| I | $\xi = (1,0)$, $\bar{\lambda} = 3$ | II | $\xi = (0,1)$, $\bar{\lambda} = 2$ | III | $\xi = (1,0)$, $\bar{\lambda} = 2$ |

d) Qual è la nuova base individuata al termine della prima iterazione dell'algoritmo?

| I | $B = \{1,5\}$ | II | $B = \{1,4\}$ | III | $B = \{2,5\}$ |

e) Quali sono le soluzioni ottime individuate dall'algoritmo?

| I | $\bar{x} = (3,5)$, $\bar{y} = (3,2,0,0,0)$ | II | $\bar{x} = (3,5)$, $\bar{y} = (0,3,2,0,0)$ | III | $\bar{x} = (0,2)$, $\bar{y} = (0,0,-3,2,0)$ |

f) Scegliere una funzione obiettivo per il problema primale (P) in modo tale che la soluzione $\bar{x}$ individuata al punto precedente rimanga ottima ma la soluzione ottima del problema duale (D) sia degenere. Giustificare la scelta effettuata.

3) Si considerino il problema dello zaino

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \max & 21x_1 & + & 12x_2 & + & 15x_3 & + & 19x_4 & & \\ & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 7 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 \in \{0,1\} & & \end{array}$$

ed il seguente metodo "Branch and Bound": la soluzione ammissibile di partenza è ottenuta utilizzando l'algoritmo *greedy* basato sui rendimenti, la valutazione superiore è ottenuta risolvendo il rilassamento continuo, la ramificazione viene eseguita sull'eventuale variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento e l'albero di enumerazione è visitato in ampiezza.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A L'ordinamento di rendimento decrescente delle variabili è x_4, x_3, x_1, x_2
- B La soluzione ammissibile di partenza dell'algoritmo è $(0,0,1,1)$
- C Nel sottoproblema in cui $x_1 = 0$ la soluzione ottima del rilassamento continuo non è ammissibile

b) Quali sono le valutazioni inferiore e superiore calcolate dall'algoritmo al nodo radice?

| I | $v_I = 42, v_S = 38$ | II | $v_I = 34, v_S = 42$ | III | $v_I = 34, v_S = 35$ |

c) Quanti nodi vengono chiusi alla prima ramificazione e per quale motivo?

| I | 1 per inammissibilità | II | nessuno | III | 1 per ammissibilità |

d) Qual è la soluzione ottima del rilassamento continuo nel sottoproblema in cui $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$?

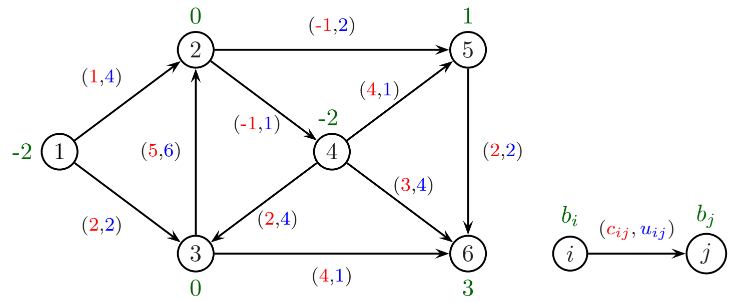
| I | $(0,1,1,0)$ | II | $(0,1,1,1/3)$ | III | $(0,0,1,1)$ |

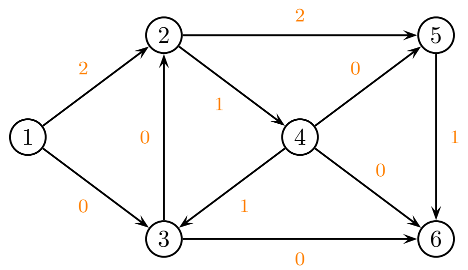
e) Su quante e quali variabili l'algoritmo ramifica prima di terminare?

| I | 2: x_1, x_2 | II | 3: x_1, x_2, x_4 | III | 4: x_1, x_2, x_4, x_3 |

f) Modificare il beneficio (coefficiente della funzione obiettivo) di 1 solo oggetto in modo tale che la soluzione ammissibile di partenza risulti essere una soluzione ottima. Giustificare la scelta effettuata.

4) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso x riportato a destra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Lo pseudoflusso è minimale

B Lo pseudoflusso è minimale qualora si aumenti il costo di $(2, 4)$ a 1 ($c_{24} = 1$)

C $\{3, 4, 2, 5\}$ è un cammino aumentante

b) Quali sono il vettore degli sbilanciamenti e lo sbilanciamento complessivo?

I $e_x = (0, -1, 1, 2, 0, -2)$ $g(x) = 3$

II $e_x = (0, -1, 1, 2, 0, -2)$ $g(x) = 0$

III $e_x = (0, 1, -1, -1, 0, 1)$ $g(x) = 2$

c) Per quali valori del costo dell'arco $(1, 3)$ lo pseudoflusso rimane minimale?

I $c_{13} \geq 0$

II $c_{13} \geq 2$

III $c_{13} \leq 2$

d) Quale dei seguenti è un cammino aumentante di costo minimo?

I $\{3, 4, 2, 5\}$

II $\{4, 5, 6\}$

III $\{3, 4, 2\}$

e) Qual è la massima quantità di flusso che si può inviare lungo il cammino aumentante $\{4, 6\}$?

I $\theta = 1$

II $\theta = 2$

III $\theta = 4$

f) Come bisogna modificare il bilancio dei nodi e/o il costo degli archi in modo che lo pseudoflusso diventi un flusso ammissibile di costo minimo? Giustificare la risposta.