RICERCA OPERATIVA (a.a. 2020/21)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna) e si risponda alle eventuali domande finali.

1) Per arginare la pandemia in corso, la Regione Etruria ha deciso di assegnare il trasporto scolastico della provincia alfea al consorzio di autotrasportatori *TuttiSicuriTuttiSani* che dispone di m autobus di varie capienze. Più precisamente, l'autobus j ha una capienza di c_j posti. Nella provincia sono presenti n scuole e a_i è il numero di studenti della scuola i che necessitano del servizio di trasporto (con $a_i > c_j$ per ogni coppia "scuola autobus"). Per esigenze sanitarie di contenimento del rischio di contagio, la regione richiede che ciascun autobus utilizzato trasporti studenti di una sola scuola e che la più alta percentuale dei posti occupati sugli autobus sia la più piccola possibile.

Aiuta il coordinatore del consorzio a pianificare il trasporto, formulando in termini di P.L.I. il problema di garantire il trasporto a tutti gli studenti della provincia nel rispetto dei vincoli sanitari e di capienza in modo da minimizzare la massima percentuale dei posti occupati sugli autobus.

Scelte le famiglia di variabili

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se l'autobus } j \text{ trasporta studenti della scuola } i \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} = \text{ numero di studenti della scuola } i \text{ trasportati sull'autobus } j$$

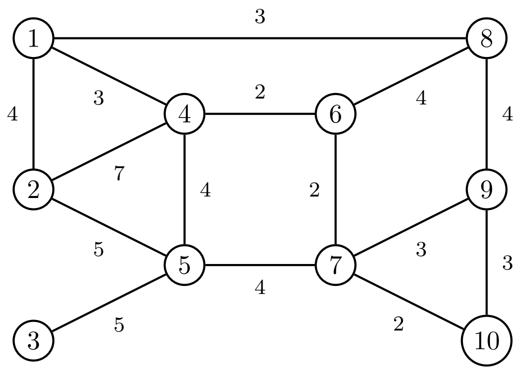
e la variabile ausiliaria u per rappresentare un'approssimazione superiore della massima percentuale di posti occupati, parte della formulazione è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

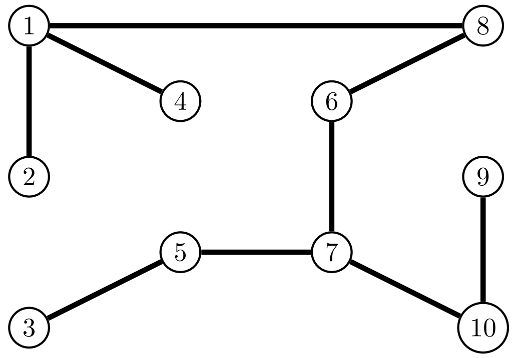
$$\begin{aligned} \min \quad & u \\ & \sum_{i=1}^{n} y_{ij} \le 1 \qquad && j = 1, \dots, m \\ & y_{ij} \in \{0, 1\}, u \in \mathbb{R} \qquad && i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Selezionare tra i vincoli seguenti tutti quelli che permettono di completare correttamente la formulazione.

- [A] $\sum_{j=1}^{m} y_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$
- [B] $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, n$
- [C] $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n$
- [D] $x_{ij} y_{ij} \le c_j \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$
- [E] $x_{ij} \le c_j y_{ij} \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$
- [F] $\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right) / c_j \ge u \quad j = 1, \dots, m$
- [G] $\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \right) / c_j \le u \quad j = 1, \dots, m$
- [H] $x_{ij} \in \mathbb{Z}_+ \quad i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m$

2) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:





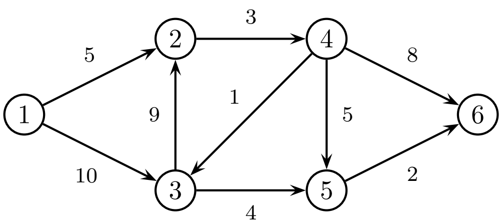
a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

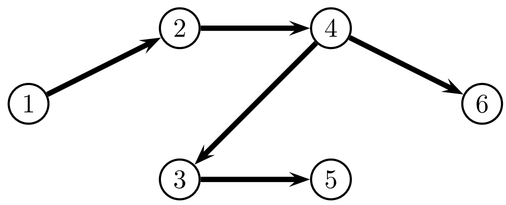
- $\boxed{\text{A}}$ Il costo dell'albero è 30
- $\boxed{\text{B}}$ Sostituendo l'arco $(1,4)$ con l'arco $(2,4)$ si ottiene un altro albero che ha lo stesso costo di quello dato
- $\boxed{\text{C}}$ Il costo dell'arco $(3,5)$ non è rilevante per l'eventuale ottimalità dell'albero
- $\boxed{\text{D}}$ Non è un albero di costo minimo perché l'arco $(7,9)$ non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli
- $\boxed{\text{E}}$ Non è un albero di costo minimo perché l'arco $(1,8)$ non soddisfa la condizione di ottimalità per tagli
- $\boxed{\text{F}}$ Non è un albero di costo minimo perché l'arco $(4,6)$ non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli

b) Modificare il costo di un arco. Quali arco e costo scegliere affinché l'albero a destra sia un albero di costo minimo?

c) Si mantenga il costo modificato al punto b) e si aggiunga l'arco $(3,10)$. Quale costo scegliere per il nuovo arco affinché l'albero a destra rimanga un albero di costo minimo?

3) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:





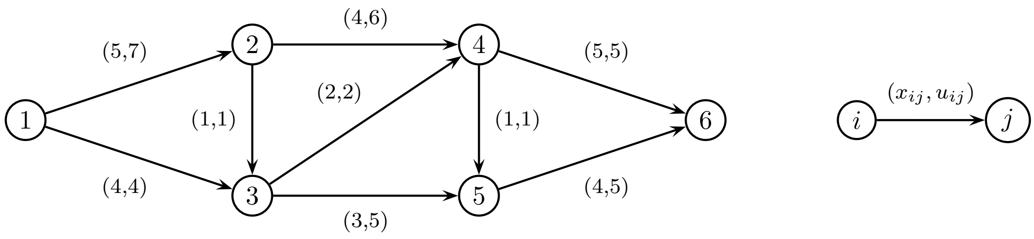
a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

- $\boxed{\text{A}}$ $d = (0, 5, 10, 8, 13, 16)$ è il vettore delle etichette relative all'albero
- $\boxed{\text{B}}$ Il costo dell'albero è 51
- $\boxed{\text{C}}$ Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco $(3,2)$ non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman
- $\boxed{\text{D}}$ Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco $(1,3)$ non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman
- $\boxed{\text{E}}$ Sostituendo l'arco $(4,6)$ con l'arco $(5,6)$ si ottiene un albero dei cammini minimi
- $\boxed{\text{F}}$ Il cammino dal nodo 1 al nodo 5 sull'albero è di costo minimo

b) Modificare il costo di un arco. Quali arco e costo scegliere affinché l'albero a destra sia un albero dei cammini minimi?

c) Quali costi è sufficiente modificare (e come) affinché il cammino minimo dal nodo 1 al nodo 5 abbia costo 14?

4) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- A Il valore del flusso riportato in figura è 10
- B Il flusso nel taglio $(\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\})$ è 9
- C Il taglio $(\{1, 2, 3, 5\}, \{4, 6\})$ ha capacità 13
- D Non esistono cammini aumentanti rispetto al flusso riportato in figura
- E Il taglio di capacità minima ha capacità 10
- F Aumentando la capacità dell'arco $(1, 3)$ il valore del flusso massimo non cambia

b) Modificare la capacità di un arco. Quali arco e costo scegliere affinché il flusso in figura sia di valore massimo?

c) Quali capacità è sufficiente modificare (e come) affinché il flusso massimo sia di valore uguale a 12?