RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna) e si risponda alle eventuali domande finali.

1) Nella notte *Iddu*, il famoso vulcano dell'omonima isola, ha improvvisamente iniziato un'eruzione esplosiva di terrificante potenza. La protezione civile ha deciso di far evuacuare rapidamente tutti gli n abitanti e turisti presenti sull'isola. A tale scopo la capitaneria di porto ha messo a disposizione m motovedette. Siano u_j il massimo numero di passeggeri imbarcabili sulla motovedetta j e p_i il peso di ciascuna persona i da evacuare. Per garantire un'equa distribuzione del carico, il comandante intende ripartire le persone tra le motovedette in modo da minimizzare il massimo carico di tutte le motovedette, considerando come carico di una motovedetta esclusivamente il peso dei passeggeri imbarcati.

Scelta la famiglia di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se la persona } i \text{ viene imbarcata sulla motovedetta } j \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m$$

parte della formulazione in termini di PLI del problema è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{array}{ll} \min & z \\ & \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \leq z \qquad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m. \end{array}$$

Quali delle seguenti famiglie di vincoli permettono di completare correttamente la formulazione?

A $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j \quad j = 1, \dots, m$

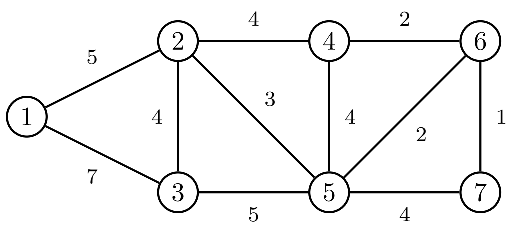
B $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j \quad j = 1, \dots, m$

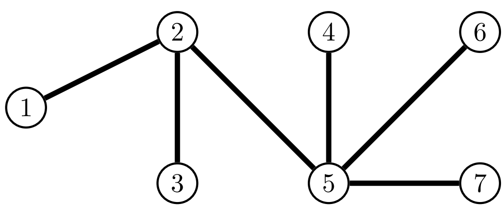
C $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq u_j \quad j = 1, \dots, m$

D $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq u_j \quad j = 1, \dots, m$

E $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = u_j \quad j = 1, \dots, m$

2) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:





a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A Il costo dell'albero è 23

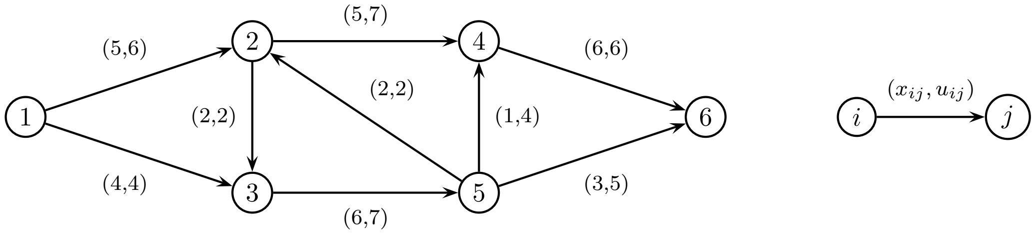
B Sostituendo l'arco $(2, 3)$ con l'arco $(2, 4)$ si ottiene un albero che ha lo stesso costo di quello dato

C Non è un albero di costo minimo perché l'arco $(1, 3)$ non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli

D Non è un albero di costo minimo perché l'arco $(5, 6)$ non soddisfa la condizione di ottimalità per tagli

b) Quali costi bisogna modificare (e come) affinché l'albero a destra sia un albero di costo minimo?

3) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A Il valore del flusso riportato in figura è 10

B Il taglio $(\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$ ha capacità 14

C Non esistono cammini aumentanti rispetto al flusso riportato in figura

D Aumentando la capacità dell'arco $(3, 5)$ il valore del flusso massimo non cambia

b) Quali capacità è sufficiente modificare (e come) affinché il flusso riportato in figura sia di valore massimo?

4) Si consideri la seguente coppia di problemi duali di Programmazione Lineare:

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array} \qquad (D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcl} \min & 4y_1 & + & 4y_2 & & & & & & \\ & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 3 \\ & & & y_2 & & & - & y_4 & = & 1 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $(0, 4)$ è una soluzione ottima per (P)

B $(4, 0)$ è una soluzione primale di base degenere

C $(0, 3, 0, 2)$ è una soluzione ottima per (D)

D $(4, 0)$ e $(2, 1, 0, 0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D)

b) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema (D)?

5) Si supponga di risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & + & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

tramite l'algoritmo del simplesso primale partendo dalla base $B = \{1, 2\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? (*suggerimento: utilizzare la rappresentazione grafica in* $\mathbb{R}^2$).

A L'indice uscente alla prima iterazione è $h = 2$

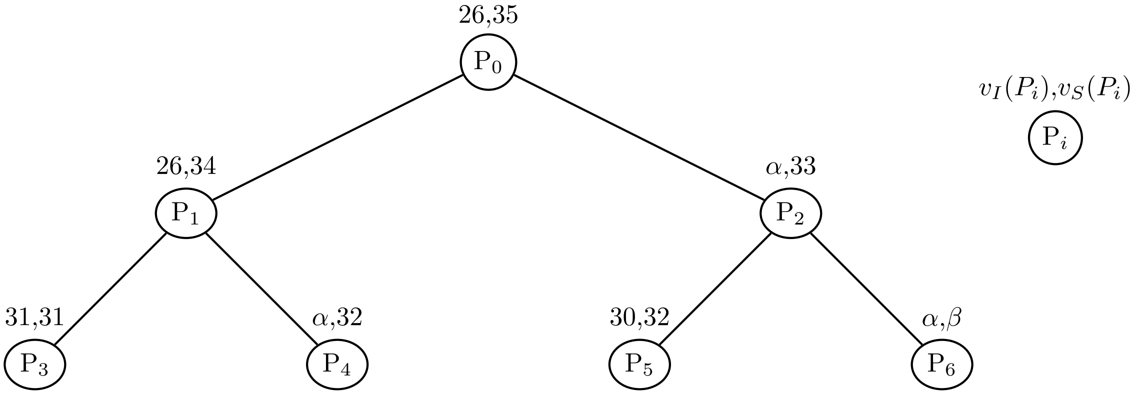
B La base ottenuta alla seconda iterazione è $\{2, 4\}$

C La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è $(0, 0)$

D La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è $(4, 0)$

b) Quanti cambi di base sono necessari per trovare una soluzione ottima? Qual è la soluzione ottima trovata?

6) Si consideri un problema di Programmazione Lineare Intera con variabili binarie $x_i \in \{0, 1\}$ e la cui funzione obiettivo deve venir massimizzata (si pensi, ad esempio, ad un problema dello zaino). In figura è riportata la porzione dell'albero di enumerazione totale ottenuta tramite l'esecuzione di alcune iterazioni di un metodo "Branch and Bound" opportuno: i nodi sono stati visitati in ordine crescente dell'indice del sottoproblema P_i e sul nodo sono riportate le corrispondenti valutazioni inferiore $v_I(P_i)$ e superiore $v_S(P_i)$.



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- [A] Il nodo P_3 viene chiuso
- [B] È possibile che α e β soddisfino la disuguaglianza $\alpha > \beta$
- [C] β deve necessariamente soddisfare la disuguaglianza $\beta > 33$
- [D] α deve necessariamente soddisfare la disugualianza $\alpha \leq 32$

b) Si scelgano valori per α e β che garantiscano la chiusura di tutti i nodi aperti.