RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna) e si risponda alle eventuali domande finali.

1) Siano dati m zaini di capacità $C_1, ..., C_m$ e n oggetti di peso $p_1, ..., p_n$, di valore in $v_1, ..., v_n$ e suddivisi in ℓ insiemi $N(1), ..., N(\ell)$ che individuano categorie differenti di oggetti ($N(1), ..., N(\ell)$ costituiscono una partizione di $\{1, ..., n\}$). Esattamente un oggetto di ciascuna categoria deve venir inserito in uno degli zaini, massimizzando la somma dei valori degli oggetti inseriti.

Scelta la famiglia di variabili

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ viene inserito nello zaino } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

parte della formulazione in termini di PLI del problema è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} v_i x_{ij} & \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 & i = 1, ..., n \\ & \sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \leq C_j & j = 1, ..., m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, ..., n, \; j = 1, ..., m \end{array}$$

Quali dei seguenti vincoli permettono di completare correttamente la formulazione?

A $\quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 1 \qquad i \in N(k), \; k = 1, ..., \ell$

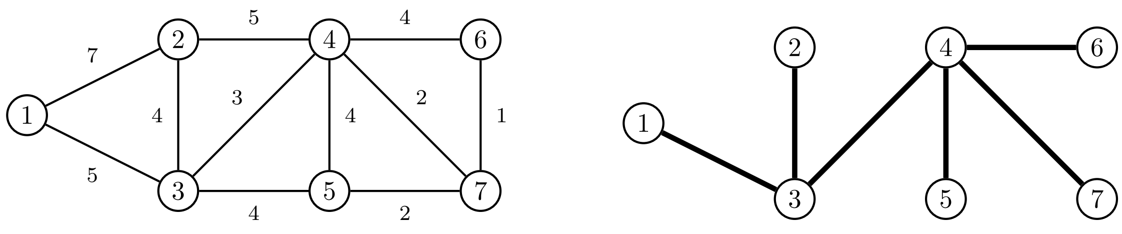
B $\quad \sum_{i \in N(k)} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad k = 1, ..., \ell$

C $\quad \sum_{i \in N(k)} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, ..., m, \; k = 1, ..., \ell$

D $\quad \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \in N(k)} x_{ij} = 1 \qquad k = 1, ..., \ell$

E $\quad \sum_{i \in N(k)} x_{ij} \leq 1 \qquad j = 1, ..., m, \; k = 1, ..., \ell$

2) Si consideri il problema dell'albero di copertura di costo minimo sul grafo di sinistra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

A Il costo dell'albero è 21

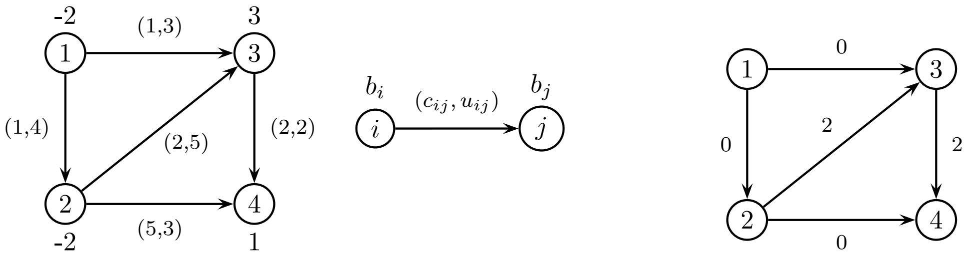
B Sostituendo l'arco $(4, 5)$ con l'arco $(3, 5)$ si ottiene un albero che ha lo stesso costo di quello dato

C Non è un albero di costo minimo perché l'arco $(1, 2)$ non soddisfa la condizione di ottimalità per cicli

D Non è un albero di costo minimo perché l'arco $(4, 7)$ non soddisfa la condizione di ottimalità per tagli

b) Quali costi bisogna modificare (e come) affinché l'albero a destra sia un albero di costo minimo?

3) Si considerino il problema di flusso di costo minimo sul grafo di sinistra e lo pseudoflusso riportato sul grafo di destra:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A lo pseudoflusso ha costo 8 e vettore di sbilanciamenti $e_x = (2, 0, -1, -1)$

B lo pseudoflusso è minimale

C lo pseudoflusso è minimale qualora si diminuisca il costo di $(2, 3)$ a 1 ($c_{23} = 1$)

D $\{1, 2, 3\}$ è un cammino aumentante di costo minimo per lo pseudoflusso

b) Quali bilanci, capacità e costi è sufficiente modificare (e come) affinché lo pseudoflusso sia un flusso di costo minimo?

4) Si consideri la seguente coppia di problemi duali di Programmazione Lineare:

$$
(P)\quad
\begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & & & \leq & 5
\end{array}
\qquad
(D)\quad
\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & 5y_1 & + & 7y_2 & & & + & 5y_4 & & \\
 & & & y_2 & & & + & y_4 & = & 1 \\
 & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 2 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

A $(2, 5)$ è una soluzione primale di base degenere

B $(5, 2)$ e $(0, 2, 0, -1)$ sono entrambe soluzioni di base

C $(2, 5)$ e $(1, 1, 0, 0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D)

D $(5, 2)$ e $(1, 1, 0, 0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D)

b) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema (P)?

5) Si supponga di risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & x_1 & & & \leq & 7 \\
 & & & x_2 & \leq & 5 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & & & \leq & 5
\end{array}
$$

tramite l'algoritmo del simplesso duale partendo dalla base $B = \{3, 4\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? (*suggerimento: utilizzare la rappresentazione grafica in* $\mathbb{R}^2$).

A La soluzione di base primale ottenuta alla prima iterazione è $(7, 0)$

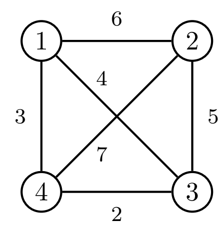
B L'indice entrante alla prima iterazione è $k = 1$

C La base ottenuta alla seconda iterazione è $\{3, 5\}$

D La soluzione primale di base ottenuta alla seconda iterazione è $(5, 0)$

b) Quanti cambi di base sono necessari per trovare una soluzione ottima? Qual è la soluzione ottima trovata?

6) Si considerino il problema del ciclo hamiltoniano di costo minimo sul grafo riportato in figura e un metodo "Branch and Bound" in cui la la valutazione inferiore è ottenuta utilizzando il 2-albero di costo minimo e la soluzione ammissibile di partenza tramite l'algoritmo del nodo più vicino a partire da un qualsiasi nodo $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$.



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ La valutazione inferiore del valore ottimo del problema è $v_I(P) = 14$

$\boxed{\text{B}}$ Quale che sia il nodo α scelto, la valutazione superiore del valore ottimo del problema soddisfa $v_S(P) < 16$

$\boxed{\text{C}}$ L'1-albero di costo minimo è formato dagli archi $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$ e $(3, 4)$

$\boxed{\text{D}}$ Il 2-albero di costo minimo è formato dagli archi $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$ e $(3, 4)$

b) Qual è la soluzione ottima del problema? Si scelga un nodo α a piacere: quanti nodi dell'albero di enumerazione bisogna visitare prima di trovare la soluzione ottima? *(si riporti la scelta effettuata per α)*