RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Per ciascun esercizio si individuino tutte le risposte corrette (attenzione: potrebbero essere più di una oppure anche nessuna) e si risponda alle eventuali domande finali.

1) Siano dati m contenitori di capacità $C_1, ..., C_m$ e n oggetti di peso $p_1, ..., p_n$ disponibili in $d_1, ..., d_n$ copie. Almeno q_i copie di ciascun oggetto i devono venir inserite nei contenitori utilizzando il minor numero possibile di contenitori nel rispetto della capacità degli stessi.

Scelte le 2 famiglie di variabili

$$x_{ij} = \text{numero di copie dell'oggetto } i \text{ inserite nel contenitore } j$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{se il contenitore } j \text{ viene utilizzato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

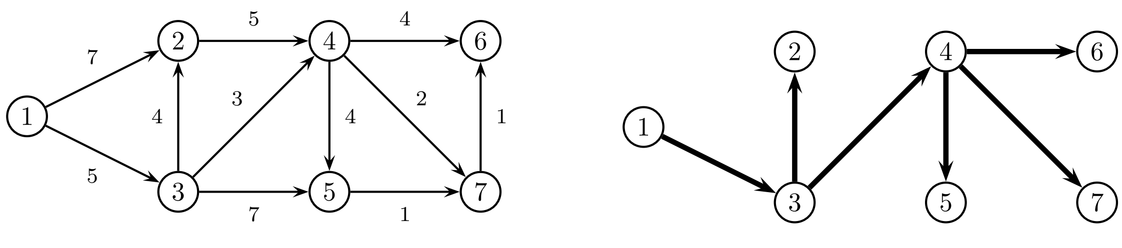
parte della formulazione in termini di PLI del problema è data dai vincoli e dalla funzione obiettivo riportati qua sotto:

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{m} y_j & \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \geq q_i & i = 1, ..., n \\ & x_{ij} \in \mathbb{Z}_+,\ y_j \in \{0,1\} & i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m \end{array}$$

Quali dei seguenti vincoli permettono di completare correttamente la formulazione?

- [A] $\sum_{j=1}^{m} p_i x_{ij} \leq C_k y_k, \quad x_{ik} \geq d_i y_k \qquad i = 1, ..., n,\ k = 1, ..., m$
- [B] $\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \leq C_j y_j \qquad j = 1, ..., m$
- [C] $\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} = C_j y_j \quad j = 1, ..., m, \qquad x_{ij} \leq d_i \quad i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m$
- [D] $x_{ij} \leq d_i y_j \qquad i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., m$
- [E] $\sum_{i=1}^{n} p_i x_{ij} \leq C_j y_j \quad j = 1, ..., m, \qquad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq d_i \quad i = 1, ..., n$

2) Si consideri il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo di sinistra:

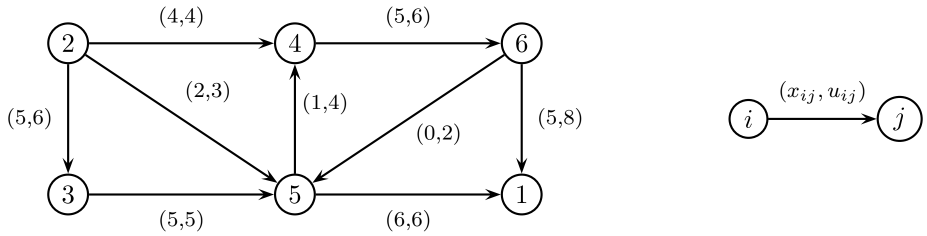


a) Quali delle seguenti affermazioni sull'albero a destra sono corrette?

- [A] $d = (0, 9, 5, 8, 12, 12, 13)$ è il vettore delle etichette relative all'albero
- [B] Sostituendo l'arco $(4, 5)$ con l'arco $(3, 5)$ si ottiene un albero che ha lo stesso vettore di etichette di quello dato
- [C] Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco $(1, 2)$ non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman
- [D] Non è un albero dei cammini minimi perché l'arco $(5, 7)$ non soddisfa la corrispondente condizione di Bellman

b) Quali costi bisogna modificare (e come) affinché l'albero a destra sia un albero dei cammini minimi?

3) Si consideri il problema del flusso massimo dal nodo 2 al nodo 1 sul grafo seguente:



a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

[A] Il valore del flusso riportato in figura è 11

[B] Non esistono cammini aumentanti rispetto al flusso riportato in figura

[C] Il taglio $(\{2,3,4,5\},\{1,6\})$ è di capacità minima

[D] Aumentando la capacità dell'arco $(3,5)$ il valore del flusso massimo non cambia

b) Quali capacità è sufficiente modificare (e come) affinché il flusso riportato in figura sia di valore massimo?

4) Si consideri la seguente coppia di problemi duali di Programmazione Lineare:

$$
(P) \quad \begin{array}{rrcrcl}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_2 & \leq & 2
\end{array}
\qquad
(D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcl}
\min & 3y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & & \\
 & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\
 & y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & = & 1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3, & & y_4 & \geq & 0.
\end{array}
$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

[A] $(1,2)$ e $(1,0,0,0)$ sono entrambe soluzioni di base

[B] $(2,1)$ e $(1,0,0,0)$ sono entrambe soluzioni di base

[C] $(2,1)$ e $(1,0,0,0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D)

[D] $(1,2)$ e $(1,0,0,0)$ sono soluzioni ottime rispettivamente per (P) e (D)

b) Qual è l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema (P)?

5) Si supponga di risolvere il seguente problema di Programmazione Lineare:

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & 2x_1 & - & x_2 & & \\
 & -x_1 & & & \leq & 0 \\
 & & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & & & x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

tramite l'algoritmo del simplesso primale partendo dalla base $B = \{1,4\}$.

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette? (*suggerimento: utilizzare la rappresentazione grafica in* $\mathbb{R}^2$).

[A] La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è $(0,1)$

[B] La base ottenuta alla seconda iterazione è $\{1,2\}$

[C] La soluzione di base ottenuta alla seconda iterazione è $(1,1)$

[D] L'indice uscente alla prima iterazione è $h = 4$

b) Quanti cambi di base sono necessari per trovare una soluzione ottima? Qual è la soluzione ottima trovata?

6) Si consideri il seguente problema dello zaino:

$$\begin{array}{lccccccccc} \max & 10x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & & \\ & 10x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & \leq & 13 \\ \end{array}$$
$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4 \in \{0,1\}$$

a) Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

$\boxed{\text{A}}$ Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono: $v_I(P) = 15$ e $v_S(P) = 17$

$\boxed{\text{B}}$ Le valutazioni inferiore e superiore del valore ottimo del problema sono: $v_I(P) = 12$ e $v_S(P) = 16$

$\boxed{\text{C}}$ Una soluzione ottima del rilassamento continuo è $(1, 3/4, 0, 0)$

$\boxed{\text{D}}$ Una soluzione ottima del rilassamento continuo è $(2/5, 1, 1, 1)$

b) Qual è la soluzione ottima del problema? Quanti nodi dell'albero di enumerazione bisogna visitare prima di trovare la soluzione ottima?