

Capitolo 3

Programmazione Lineare

In questo capitolo ci occuperemo di una classe particolarmente importante di problemi di ottimizzazione, ossia i problemi di *Programmazione Lineare* (*PL*). Questi problemi sono caratterizzati dal fatto che tutte le relazioni (vincoli) tra le quantità in gioco (variabili), compreso il valore della funzione obiettivo, sono lineari; inoltre, le variabili non sono vincolate ad assumere insiemi discreti di valori (ad esempio solamente valori interi), cioè possono assumere valori reali.

Per quanto l'assunzione di linearità nei fenomeni rappresentati dal modello possa apparire piuttosto restrittiva, questa classe di problemi ha un forte interesse pratico. Infatti, in molte situazioni reali i componenti di un sistema reagiscono in modo almeno approssimativamente lineare alle decisioni prese, quindi molti problemi reali possono essere modellati con sufficiente precisione in termini di Programmazione Lineare. Inoltre, per questa classe di problemi sono disponibili algoritmi risolutivi efficienti che consentono di risolvere istanze di dimensione elevata (fino a centinaia di migliaia o milioni di vincoli e variabili) anche su computer di potenza limitata. Infine, molti approcci per problemi complessi sono basati sulla risoluzione di un numero, spesso elevato, di sottoproblemi di *PL* che approssimano il problema.

3.1 Problemi di Programmazione Lineare

Un problema di Programmazione Lineare è un problema di ottimizzazione (di massimo o di minimo) caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1. la funzione obiettivo $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è lineare, ovvero tale che $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$; ricordiamo che $f(x)$ è una funzione lineare se e solo se esiste $c \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x) = cx$.
2. l'insieme ammissibile è definito da un insieme finito di vincoli lineari del tipo $ax = b$ e/o $ax \leq b$ e/o $ax \geq b$, dove $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$.

I vincoli di un problema di *PL* possono quindi essere sia di uguaglianza che di disuguaglianza, e questi ultimi possono essere sia di maggiore od uguale che di minore od uguale. Nell'analisi dei problemi di *PL* conviene però adottare una qualche forma standard in cui tutti i vincoli hanno lo stesso formato; nel seguito, noi utilizzeremo principalmente la forma

$$\max \{ cx : Ax \leq b \} \quad (3.1)$$

in cui A è una matrice reale $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Esempio 3.1:

Per il problema della *Pintel*, descritto nel paragrafo 1.2.1.1, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = [500 \quad 200].$$

Si noti che, data la forma che abbiamo scelto per il problema, i vincoli di non negatività sono incorporati nella matrice A ; inoltre, per semplicità di notazione abbiamo scalato di un fattore 100000 i termini noti (questo corrisponde a considerare come unità un lotto di 100000 processori).

Assumere che un problema di *PL* sia dato nella forma (3.1) non comporta alcuna perdita di generalità, in quanto qualsiasi problema di *PL* può essere agevolmente ricondotto alla forma (3.1) introducendo oppure eliminando vincoli e/o variabili per mezzo delle seguenti equivalenze:

$$\begin{aligned} i) \quad & \max \sum_{j=1}^n c_j x_j \equiv - \min \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j \\ ii) \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \equiv \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \end{cases} \\ iii) \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \sum_{j=1}^n (-a_{ij}) x_j \leq -b_i \\ iv) \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - s_i = b_i, \quad s_i \geq 0 \\ v) \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + s_i = b_i, \quad s_i \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le variabili s_i in (3.2.iv) e (3.2.v) sono dette *variabili di scarto*, e sono variabili "nuove", introdotte appositamente nel modello; le variabili x_i sono invece

dette *variabili strutturali*, per evidenziare il loro scaturire dalla struttura del problema e non da manipolazioni algebriche effettuate sul modello.

Inoltre, è sempre possibile trasformare un problema in cui una variabile x_i non è vincolata in segno in uno equivalente in cui al posto di x_i appaiono due variabili, che possiamo indicare con x_i^+ e x_i^- , vincolate in segno tramite la trasformazione algebrica

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \quad x_i^+ \geq 0, \quad x_i^- \geq 0. \quad (3.3)$$

Esempio 3.2: Trasformazioni equivalenti

Si consideri il problema della Fonderia del §1.2.1.2:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0.025x_1 + 0.030x_2 + 0.018x_3 + 10x_4 \\ & 4x_1 + x_2 + 0.6x_3 \geq 3250 \\ & 4x_1 + x_2 + 0.6x_3 \leq 5500 \\ & 0.45x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 + 100x_4 \geq 450 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

Il problema può essere portato in forma (3.1) applicando la trasformazione (3.2.i) alla funzione obiettivo, la trasformazione (3.2.ii) al quarto vincolo, la trasformazione (3.2.iii) al primo ed al terzo vincolo, ed introducendo vincoli espliciti per la non negatività delle variabili. Ciò porta alla formulazione

$$\begin{aligned} \max \quad & -0.025x_1 - 0.030x_2 - 0.018x_3 - 10x_4 \\ & -4x_1 - x_2 - 0.6x_3 \leq -3250 \\ & 4x_1 + x_2 + 0.6x_3 \leq 5500 \\ & -0.45x_1 - 0.5x_2 - 0.4x_3 - 100x_4 \leq -450 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1000 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \leq -1000 \\ & -x_1 \leq 0 \\ & \quad \quad -x_2 \leq 0 \\ & \quad \quad \quad -x_3 \leq 0 \\ & \quad \quad \quad \quad -x_4 \leq 0 \end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$c = [-0.025 \quad -0.030 \quad -0.018 \quad -10]$$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & -0.6 & 0 \\ 4 & 1 & 0.6 & 0 \\ -0.45 & -0.5 & -0.4 & -100 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -3250 \\ 5500 \\ -450 \\ 1000 \\ -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si noti che tramite le equivalenze (3.2) e (3.3) è anche possibile trasformare un problema in forma (3.1) in un altro equivalente di forma diversa. Ad esempio, si potrebbe alternativamente utilizzare come forma standard la seguente:

$$\min\{ cx : Ax = b, x \geq 0 \}. \quad (3.4)$$

Esempio 3.3:

Introducendo delle variabili di scarto ed esplicitando i vincoli di non negatività, il problema della Pintel può essere posto nella forma (3.4) con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad c = [-500 \quad -200].$$

In questa nuova formulazione le ultime tre componenti del vettore $x \in \mathbb{R}^5$ sono le variabili di scarto.

Se il numero di variabili è pari a due oppure tre, un problema di *PL* può essere descritto (e risolto) mediante una sua rappresentazione geometrica nel piano o nello spazio. In Figura 3.1 ciò è mostrato per il problema della *Pintel*: avendo indicato con x_1 il numero di Pintium e con x_2 il numero di Coloron prodotti, l'area evidenziata col tratteggio rappresenta l'*insieme ammissibile*, o regione ammissibile, del problema, cioè l'insieme di tutti i punti che soddisfano i vincoli.

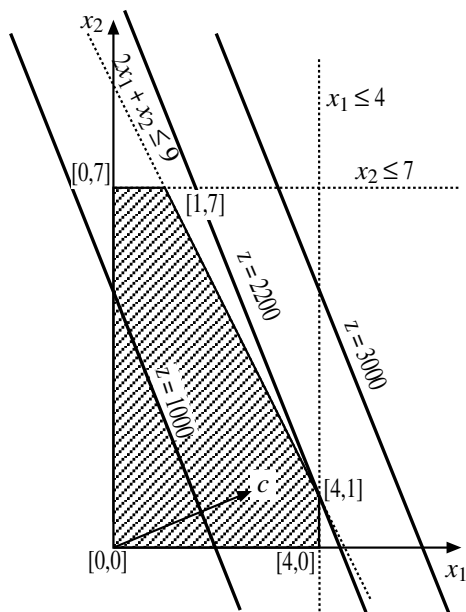


Figura 3.1: Il problema della Pintel

Si tratta dell'intersezione di un certo numero di semipiani, uno per ogni vincolo: un insieme di questo tipo viene detto *poliedro* (*politopo* nel caso particolare in cui sia limitato, come nell'esempio che stiamo considerando). Nel seguito vedremo che tale insieme è convesso; infatti, si usa spesso il termine *poliedro convesso* per caratterizzare l'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare. Nella figura sono evidenziati i vincoli per mezzo delle rette luogo dei punti che li soddisfano come uguaglianze: tali rette

costituiscono la frontiera dei semipiani che essi definiscono. I vincoli di non negatività sono individuati dagli assi cartesiani. Le rette corrispondenti ai vincoli individuano nel poliedro delle *facce* e dei *vertici*: sono vertici ad esempio i punti $(4, 1)$ e $(1, 7)$, ed è una faccia il segmento che li unisce. I vertici e le facce giocano un ruolo particolarmente importante nella Programmazione Lineare: dimostreremo infatti che, sotto opportune ipotesi, se l'insieme delle soluzioni ottime di un problema di *PL* è non vuoto, allora almeno una soluzione ottima sarà un vertice; inoltre, se un punto interno ad una faccia è soluzione ottima del problema, allora tutti i punti della faccia sono soluzioni ottime.

La verità di queste proprietà per il caso particolare in esame può essere facilmente compresa esaminando la figura. A questo scopo consideriamo la retta $500x_1 + 200x_2 = z$: essa definisce l'insieme delle soluzioni (eventualmente non ammissibili) che hanno valore della funzione obiettivo uguale a z . In figura sono indicate tre di tali rette, corrispondenti ai valori 1000, 2200 e 3000: al crescere di z le rette vengono traslate muovendosi nella direzione definita dal vettore $c = (500, 200)$, *gradiente* della funzione obiettivo. Chiaramente, per ogni valore prefissato di z è possibile realizzare un profitto pari a quel valore se e solo se la corrispondente retta ha intersezione non vuota con la regione ammissibile: nel nostro esempio, ciò accade per $z = 1000$ e $z = 2200$, ma non per $z = 3000$. Pertanto, per trovare una soluzione ottima del nostro problema, basta traslare la retta nella direzione del gradiente fintanto che l'intersezione con la regione ammissibile si mantiene non vuota. Nel nostro caso, il massimo valore attribuibile a z è 2200: per tale valore, l'intersezione tra la retta e l'insieme ammissibile si riduce ad un solo punto, il vertice $(4, 1)$, che è pertanto l'unica soluzione ottima del problema.

Nel nostro esempio la regione ammissibile del problema è limitata; in generale, però, la regione ammissibile di un problema di *PL* può essere non limitata lungo alcune direzioni. In questi casi, a seconda della direzione del gradiente della funzione obiettivo possono esistere direzioni lungo le quali è possibile spostarsi mantenendo l'ammissibilità e facendo crescere il valore della funzione obiettivo senza mai raggiungere un valore massimo. Ad esempio, se nel problema della Pintel non ci fossero il secondo ed il terzo vincolo, potremmo fare crescere all'infinito il valore di z senza mai trovarne uno per cui la retta $500x_1 + 200x_2 = z$ abbia intersezione vuota con la regione ammissibile: questo è un caso di problema illimitato. Un caso in un certo senso opposto è quello in cui alcuni dei vincoli sono tra loro incompatibili, per cui la regione ammissibile risulta essere vuota.

Esempio 3.4:

Si consideri il problema di *PL*

$$\begin{array}{rcll} \max & 3x_1 & -x_2 & \\ & x_1 & +x_2 & \leq 4 \\ & -x_1 & +x_2 & \leq 5 \\ & & -x_2 & \leq 2 \end{array} \quad (3.5)$$

Mediante la trasformazione 3.2(v), il problema può essere trasformato nel problema equivalente:

$$\begin{array}{rcccccc} \max & 3x_1 & -x_2 & & & & \\ & x_1 & +x_2 & +s_1 & & & = 4 \\ & -x_1 & +x_2 & & +s_2 & & = 5 \\ & & -x_2 & & & +s_3 & = 2 \\ & & & s_1, & s_2, & s_3 & \geq 0. \end{array}$$

La Figura 3.2 fornisce la rappresentazione geometrica del problema: le soluzioni ammissibili del problema appartengono al poligono tratteggiato (regione ammissibile). Le variabili di scarto sono associate ai vincoli e definiscono la retta di supporto del lato del poligono ($s_i = 0$) e il semipiano ammissibile corrispondente al vincolo ($s_i \geq 0$). Nella figura è indicato il gradiente della funzione obiettivo, c , e la sua curva di livello, cioè l'insieme dei punti tali che $3x_1 - x_2 = z$, per un dato valore z : la soluzione ottima del problema è data dal vertice v in figura, cui corrisponde la soluzione $x_1 = 6$, $x_2 = -2$, $s_1 = 0$, $s_2 = 13$, $s_3 = 0$.

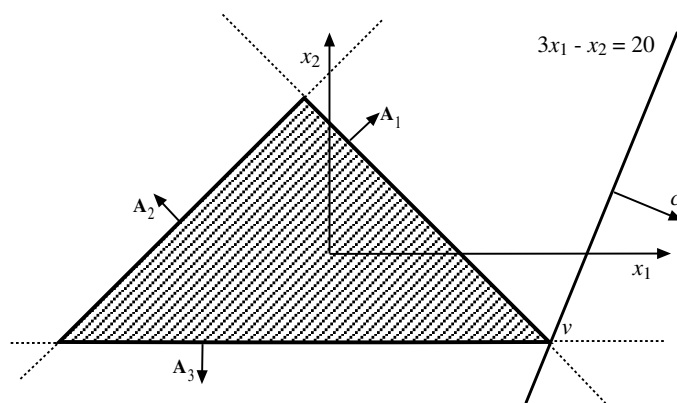


Figura 3.2: Rappresentazione geometrica del problema (3.5)

Esercizio 3.1 *Costruire ulteriori esempi di PL nel piano. In particolare, fornire problemi per cui risulti rispettivamente: regione ammissibile vuota, problema illimitato, almeno due soluzioni ottime.*

3.1.1 Geometria della Programmazione Lineare

In questo paragrafo introdurremo in maniera formale i concetti geometrici precedentemente accennati, che permettono di caratterizzare l'insieme delle soluzioni ammissibili di un problema di Programmazione Lineare; nella trattazione privilegeremo comunque un approccio intuitivo.

Vincoli e facce

Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^n , un vincolo lineare del tipo $A_i x = b_i$ individua l'iperpiano $P_i = \{ x : A_i x = b_i \}$, che costituisce la frontiera del semispazio

$S_i = \{ x : A_i x \leq b_i \}$ ¹ individuato dal vincolo $A_i x \leq b_i$. Un insieme P è un *poliedro* se è esprimibile come intersezione di un numero finito m di semispazi, cioè se esistono una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ed un vettore $b \in \mathbb{R}^m$ per cui

$$P = \{ x : Ax \leq b \}.$$

Un insieme C è detto *convesso* se, comunque presi due punti x ed y appartenenti a C , il segmento avente x ed y per estremi è contenuto in C , cioè

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in C, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Un semispazio è un insieme convesso, ed essendo l'intersezione di insiemi convessi un insieme convesso, anche un poliedro è un insieme convesso.

Esercizio 3.2 *Si dimostrino le affermazioni precedenti.*

Esempio 3.5:

In Figura 3.3 è mostrato ancora una volta il poliedro corrispondente all'insieme ammissibile del problema della Pintel. Ciascuna linea tratteggiata indica un iperpiano (retta) corrispondente ad uno dei vincoli $A_i x \leq b_i$, $i = 1, \dots, 5$ del problema. Nella figura, a ciascun iperpiano è associato il vettore A_i (la corrispondente riga della matrice dei coefficienti), che è perpendicolare all'iperpiano e "punta" verso il semispazio (semipiano) in cui il vincolo è violato.

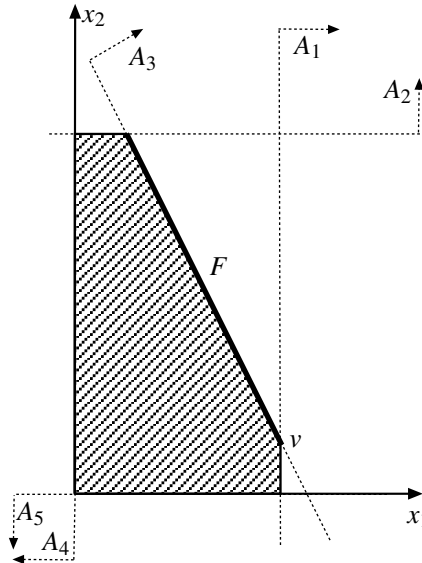


Figura 3.3: Facce e vincoli nel problema della Pintel

¹Qui e nel seguito, con una piccola imprecisione di linguaggio useremo il termini iperpiano e semispazio per indicare o un iperpiano/semispazio propriamente detto ($b_i = 0$) oppure una sua traslazione, cioè un iperpiano/semispazio affine ($b_i \neq 0$).

Consideriamo il poliedro $P = \{ x : Ax \leq b \}$, e sia I un qualsiasi sottoinsieme dell'insieme degli indici di riga $\{ 1, \dots, m \}$; indichiamo con A_I la sottomatrice di A che contiene le righe i cui indici sono in I e con b_I il sottovettore di b che contiene gli elementi i cui indici sono in I ; infine, sia $\bar{I} = \{ 1, \dots, m \} \setminus I$ il complemento di I . L'insieme

$$P_I = \{ x : A_I x = b_I, A_{\bar{I}} x \leq b_{\bar{I}} \}$$

è chiaramente un sottoinsieme di P : se $P_I \neq \emptyset$, tale insieme viene detto *faccia* di P . È immediato verificare che ogni faccia di un poliedro è a sua volta un poliedro (si veda infatti (3.2.ii)). Il numero di facce distinte di un poliedro è finito, anche se potenzialmente esponenziale in m (al più pari al numero di sottoinsiemi di $\{ 1, \dots, m \}$). Osserviamo che, se si sceglie $I = \emptyset$, si ottiene una faccia particolare che è il poliedro stesso.

Una faccia propria (cioè non coincidente con tutto il poliedro P) che non sia contenuta in nessun'altra faccia è detta *faccia massimale* o *faccetta*, mentre una faccia che non contenga nessuna faccia distinta da essa è detta *faccia minimale*. In Figura 3.3, la faccia $F = P_{\{3\}}$, evidenziata dal tratto più spesso, è una faccia massimale, mentre $v = P_{\{1,3\}}$ è una faccia minimale. Si noti che $P_A \subseteq P_B$ se $B \subseteq A$: quindi le facce massimali corrispondono ad insiemi “piccoli” di indici I , mentre le facce minimali corrispondono ad insiemi “grandi” di indici I . La *dimensione* di una faccia è definita come la dimensione del più piccolo sottospazio che la contiene. Ad esempio, sempre con riferimento alla Figura 3.3, il più piccolo sottospazio che contiene F è l'iperpiano corrispondente al terzo vincolo, che essendo una retta ha dimensione 1; v ha invece dimensione 0, mentre la faccia coincidente con il poliedro P ha dimensione 2. È possibile verificare che una faccia determinata da una matrice A_I di rango k ha dimensione $n - k$ o inferiore².

Le facce determinate da sottomatrici A_I di rango n hanno dimensione 0, cioè sono punti: infatti, in questo caso il sistema lineare $A_I x = b_I$ ammette una ed una sola soluzione. Tali facce sono dette i *vertici* di P . Un insieme di indici B , di cardinalità n , tale che la sottomatrice quadrata A_B sia invertibile viene detto una *base*, A_B viene detta *matrice di base* corrispondente a B , e $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ viene anche detto *soluzione di base*. Se $\bar{x} \in P$ allora la corrispondente soluzione di base \bar{x} è un vertice di P e la base B viene detta *ammisibile*; se invece $\bar{x} \notin P$, B viene detta *non ammissibile*. Le facce individuate da sottomatrici A_I di rango $n - 1$ hanno dimensione (al più) 1, sono cioè segmenti se sono limitate, semirette o rette altrimenti; tali facce sono dette *spigoli* di P . In Figura 3.3, la faccia F è uno spigolo del poliedro.

Dato un punto $\bar{x} \in P$, i vincoli che vengono soddisfatti da \bar{x} come uguaglianze vengono detti vincoli *attivi* in \bar{x} ; indichiamo con $I(\bar{x})$ l'*insieme degli*

²Può avere dimensione inferiore se le disequazioni corrispondenti ad $A_{\bar{I}}$ contengono un'equazione implicita; un esempio è dato da $P = \{(x_1, x_2) : x_1 \leq 0, -x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\}$ e $I = \{3\}$.

indici dei vincoli attivi:

$$I(\bar{x}) = \{i : A_i \bar{x} = b_i\}.$$

Osserviamo che $P_{I(\bar{x})}$ è una faccia del poliedro che contiene \bar{x} . In generale, qualsiasi $I' \subseteq I(\bar{x})$ definisce una faccia $P_{I'}$ che contiene \bar{x} : chiaramente, $I(\bar{x})$ definisce la faccia minimale tra tutte queste.

Esempio 3.6:

Si consideri il poliedro $P \subset \mathbb{R}^3$ definito dal seguente insieme di vincoli:

$$\begin{array}{rcll} -x_1 & & \leq & 0 & (1) \\ & x_2 & & \leq & 1 & (2) \\ & & -x_3 & \leq & 0 & (3) \\ & -x_2 & & \leq & 0 & (4) \\ & & x_3 & \leq & 1 & (5) \\ x_2 & + & x_2 & \leq & 2 & (6) \end{array}$$

ossia da

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Il poliedro è il “parallelepipedo illimitato” rappresentato in Figura 3.4. In figura sono indicati i sei iperpiani che delimitano la frontiera dei sei semispazi corrispondenti ai sei vincoli: ad esempio, il semispazio $x_1 = 0$ corrisponde al piano verticale x_2x_3 , che include il “lato sinistro” del parallelepipedo.

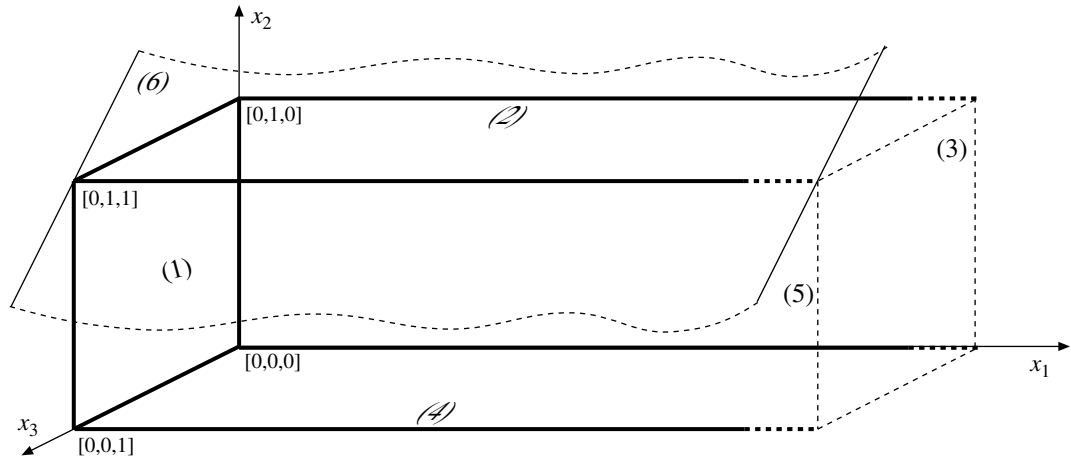


Figura 3.4: Un poliedro in \mathbb{R}^3

Le facce $P_{\{1\}}$, $P_{\{2\}}$, $P_{\{3\}}$, $P_{\{4\}}$, e $P_{\{5\}}$, sono tutte e sole le faccette del poliedro; esse corrispondono rispettivamente al “lato sinistro”, al “lato superiore”, al “lato posteriore”, al “lato inferiore” ed al “lato anteriore” del parallelepipedo. Tutte queste facce hanno dimensione due poiché il più piccolo sottospazio che contiene ciascuna di esse è un piano. Invece, la faccia $P_{\{6\}}$ non è una faccetta del poliedro.

Si noti che la faccia $P_{\{6\}}$ coincide con le facce $P_{\{2,5\}}$, $P_{\{2,6\}}$ e $P_{\{5,6\}}$ ed ognuna di esse individua lo spigolo “anteriore in alto” del poliedro; si osservi che se è vero che ad ogni insieme $I \subset \{1, \dots, m\}$ può corrispondere una faccia, è anche vero che ad insiemi diversi può corrispondere la stessa faccia. Inoltre, non a tutti gli insiemi I corrisponde necessariamente una faccia: questo è il caso di $P_{\{3,6\}}$, che è vuoto, in quanto i vincoli (3) e (6) individuano la retta $x_3 = 0, x_2 = 2$ che ha intersezione vuota con il poliedro.

Il poliedro ha quattro vertici, i punti $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ e $(0, 1, 1)$. A questi vertici corrispondono opportune basi: a $(0, 0, 0)$ corrisponde la base $\{1, 3, 4\}$, a $(0, 0, 1)$ corrisponde la base $\{1, 5, 4\}$, a $(0, 1, 0)$ corrisponde la base $\{1, 2, 3\}$ e a $(0, 1, 1)$ corrispondono le basi $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 2, 6\}$ e $\{1, 5, 6\}$. Si noti che ad ogni vertice del poliedro corrisponde (almeno) una base, ma il viceversa non è vero, ossia esistono basi a cui non corrispondono vertici del poliedro. Nel nostro esempio questo è il caso delle basi $\{1, 3, 6\}$ e $\{1, 4, 6\}$, che individuano le soluzioni di base $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$, che non sono ammissibili.

Il poliedro ha quattro spigoli limitati, corrispondenti al “lato sinistro”, e quattro spigoli illimitati, corrispondenti ai “lati infiniti” del parallelepipedo.

È possibile dimostrare che i vertici di un poliedro corrispondono a tutte e sole le soluzioni di base ammissibili. Come già evidenziato nell'esempio della *Pintel*, tali particolari punti giocano un ruolo molto importante nella teoria della Programmazione Lineare. Tuttavia, è utile evidenziare anche che in generale non è detto che un poliedro abbia dei vertici. Un semplice esempio è fornito dal poliedro P' , ottenuto da quello di Figura 3.4 rimuovendo il vincolo (1): si ottiene infatti un “parallelepipedo infinito” che ha come faccette i quattro “rettangoli infiniti” individuati dai vincoli (2), (3), (4) e (5). P' non ha vertici, e in questo caso gli spigoli del poliedro corrispondono a rette.

Il poliedro dell'esempio precedente non ha vertici in quanto la corrispondente matrice dei vincoli non ha rango massimo. Nel caso di poliedri per cui risulta $\text{rango}(A) < n$, tuttavia, ci si può sempre ricondurre a problemi in cui i vincoli sono individuati da una matrice di rango massimo, come mostrato nel seguente teorema.

Teorema 3.1 *Se $\text{rango}(A) < n$, allora il problema (3.1) può essere risolto studiando in sua vece un diverso problema di Programmazione Lineare la cui matrice dei coefficienti si ottiene eliminando una colonna da A .*

Dimostrazione Se $\text{rango}(A) < n$, esiste almeno una colonna di A che può essere espressa come combinazione lineare delle altre; assumiamo senza perdita di generalità che si tratti dell'ultima. Abbiamo quindi che $A = [A', a^n]$, $c = (c', c_n)$ e $x = (x', x_n)$, ed esiste un vettore $\mu \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che $A'\mu = a^n$. Allora, il problema (3.1) può essere risolto studiando in sua vece il problema

$$\max \{ c'x' : A'x' \leq b \}. \quad (3.6)$$

ossia rimuovendo l'ultima colonna di A e la corrispondente variabile. Infatti:

- se (3.6) non ha soluzione allora non può averla nemmeno (3.1): infatti, $x = (x', x_n)$ è ammissibile per (3.1) se e solo se $x' + \mu x_n$ è ammissibile per (3.6).
- se (3.6) è superiormente illimitato allora tale è pure (3.1): infatti, x' è ammissibile per (3.6) se e solo se $(x', 0)$ è ammissibile per (3.1), e le due soluzioni hanno lo stesso costo.

- se \bar{x}' è una soluzione ottima per (3.6), allora $x(\alpha) = [\bar{x}' - \alpha\mu, \alpha]$ è una soluzione ammissibile per (3.1), di costo $cx(\alpha) = c'\bar{x}' + \alpha(c_n - c'\mu)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$: infatti $Ax(\alpha) = A'\bar{x}' - \alpha A'\mu + \alpha a^n = A'\bar{x}' \leq b$. Di conseguenza, se $c_n \neq c'\mu$ allora (3.1) è superiormente illimitato: data \bar{x} , è sempre possibile scegliere α in modo che $x(\alpha)$ abbia valore superiore a qualsiasi soglia fissata. Se invece $c_n = c'\mu$, $c\bar{x}'$ è il valore ottimo di (3.1). Sia infatti $\hat{x} = (\hat{x}', \hat{x}_n)$ una soluzione ottima di (3.1); risulta:

$$c'\bar{x}' \leq c\hat{x} = c'\hat{x}' + c_n\hat{x}_n = c'\hat{x}' + c'\mu\hat{x}_n = c'(\hat{x}' + \mu\hat{x}_n) \leq c'\bar{x}',$$

dove la prima disuguaglianza segue dall'ammissibilità di $(\bar{x}', 0)$ e dall'ottimalità di \hat{x} per (3.1) mentre la seconda disuguaglianza segue dall'ammissibilità di $\hat{x}' + \mu\hat{x}_n$ e dall'ottimalità di \bar{x}' per (3.6). Poiché hanno lo stesso costo di \bar{x}' , e quindi anche di \hat{x} , tutte le $x(\alpha)$ sono soluzioni ottime di (3.1). \diamond

Esempio 3.7:

Consideriamo ancora il poliedro P' ottenuto da quello di Figura 3.4 rimuovendo il vincolo (1); per quanto riguarda l'ottimizzazione su P' , la variabile x_1 del problema può essere eliminata e trattata implicitamente lavorando sul politopo $\bar{P}' \subset \mathbb{R}^2$ definito da

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ossia il quadrato (ipercubo) unitario nello spazio $[x_2, x_3]$ (si noti che \bar{P}' ha vertici, e $\text{rango}(A') = 2$). Dato qualsiasi punto $[x_2, x_3]$ ammissibile per \bar{P}' , è immediato costruire un punto $[x_1, x_2, x_3]$ ammissibile per P . Pertanto, se il coefficiente di x_1 in funzione obiettivo è diverso da zero, allora il problema è superiormente illimitato; altrimenti è possibile fissare x_1 in modo arbitrario (ad esempio al valore 0) e risolvere il problema ristretto alle rimanenti due variabili.

L'immediata conseguenza del Teorema 3.1 è che è possibile assumere, senza perdita di generalità, che la matrice dei coefficienti A di un problema di Programmazione Lineare abbia rango massimo. Infatti, se ciò non accade si può applicare iterativamente la procedura descritta nel teorema, eliminando colonne (e variabili) fintanto che la matrice dei coefficienti rimanente abbia rango massimo. Determinare una soluzione ottima di tale problema ridotto (oppure verificare che sia vuoto o illimitato) permette di determinare una soluzione ottima del problema originale (oppure verificare che sia vuoto o illimitato). Pertanto, nel seguito supporremo che la matrice dei vincoli A sia tale che $\text{rango}(A) < n$ e, di conseguenza, che il poliedro che individua la regione ammissibile abbia almeno un vertice.

Il teorema di decomposizione

Come abbiamo osservato, i poliedri sono insiemi convessi. La convessità è una proprietà molto importante in ottimizzazione: infatti i problemi di

ottimizzazione convessi, in cui cioè sia la regione ammissibile che la funzione obiettivo sono convesse (come accade nella Programmazione Lineare), appartengono alla classe \mathcal{P} e quindi possono essere risolti efficientemente.

Una caratteristica dei poliedri convessi è che possono essere rappresentati in due modi diversi. Quella che abbiamo descritto finora è una rappresentazione *per facce*, ossia mediante un insieme finito di vincoli che definiscono le facce del poliedro. Lo stesso poliedro può però essere equivalentemente rappresentato *per punti*, ossia partendo dall'insieme dei suoi vertici.

Dato un insieme finito $X = \{x^1, \dots, x^s\} \subset \mathbb{R}^n$, si può dimostrare che il suo *inviluppo convesso*

$$\text{conv}(X) = \left\{ x = \sum_{i=1}^s \lambda_i x^i : \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, s \right\}$$

è il più piccolo insieme convesso che contiene tutti i punti di X ; inoltre, è un poliedro limitato (politopo), i cui vertici sono un sottoinsieme dei punti di X . L'operazione di inviluppo convesso permette di rappresentare qualsiasi politopo, ma, come abbiamo visto, non tutti i poliedri sono tali. Per poter studiare il caso illimitato introduciamo quindi alcune ulteriori definizioni.

Un insieme $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è detto *cono* se

$$x \in C, \alpha \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha x \in C;$$

in particolare, se C è anche un insieme convesso (ossia un *cono convesso*) una definizione equivalente è

$$x, y \in C, \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad \lambda x + \mu y \in C. \quad (3.7)$$

In Figura 3.5 sono rappresentati due coni: A non è convesso mentre B lo è.

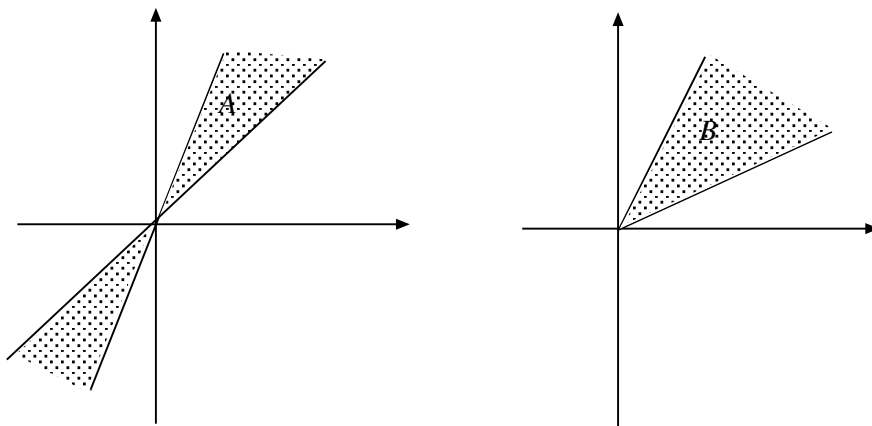


Figura 3.5: Coni

È facile verificare che qualsiasi poliedro della forma $\{x : Ax \leq 0\}$ è un cono, e viene quindi detto *cono poliedrico*.

Analogamente al caso dei politopi, anche per i coni poliedrici non vuoti esiste una rappresentazione *per direzioni* alternativa alla rappresentazione per facce. Dato un insieme finito $V = \{v^1, \dots, v^t\} \subset \mathbb{R}^n$, si può dimostrare che il *cono finitamente generato* dai vettori v^1, \dots, v^t , ovvero

$$\text{cono}(V) = \left\{ v = \sum_{i=1}^t \nu_i v^i : \nu_i \in \mathbb{R}_+ \quad i = 1, \dots, t \right\},$$

è il più piccolo cono convesso che contiene tutti i vettori di V , detti *generatori*.

Dati due insiemi S e T in \mathbb{R}^n entrambi non vuoti, definiamo l'insieme somma $Z = S + T$ come l'insieme di tutti quei punti z per cui esistano $x \in S$ e $y \in T$ tali che $z = x + y$; nel caso uno dei due insiemi sia vuoto, per definizione, l'insieme somma coincide con l'altro insieme. Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, fornisce un'utile caratterizzazione dei poliedri:

Teorema 3.2 (*Teorema di decomposizione di poliedri, Motzkin 1936*) *L'insieme $P \subseteq \mathbb{R}^n$ è un poliedro se e solo se esistono due insiemi finiti (eventualmente vuoti) $X = \{x^1, \dots, x^s\} \subseteq \mathbb{R}^n$ e $V = \{v^1, \dots, v^t\} \subseteq \mathbb{R}^n$ per cui $P = \text{conv}(X) + \text{cono}(V)$.*

Il cono convesso $\text{cono}(V)$, detto *cono di recessione* di P , costituisce l'insieme di tutte le *direzioni* del poliedro P , ossia l'insieme di tutti i vettori $v \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano la seguente proprietà:

$$x \in P \quad \Rightarrow \quad x + \alpha v \in P, \quad \forall \alpha \geq 0. \quad (3.8)$$

Il significato geometrico del Teorema 3.2 è illustrato nella Figura 3.6, dove il poliedro P è dato dalla somma del triangolo $Q = \text{conv}(\{x^1, x^2, x^3\})$ con il cono $C = \text{cono}(\{v^1, v^2\})$. Ciascun vettore $v \in C$ ha la proprietà che, partendo da un qualsiasi punto $x \in P$ e muovendosi da x lungo la direzione v non si esce mai dal poliedro, ovvero la semiretta di origine x e direzione v è interamente contenuta in P .

Quando P è limitato si ha ovviamente $V = \emptyset$, ed il poliedro può essere rappresentato come l'involuppo convesso di un opportuno insieme finito di punti. Ogni poliedro è esprimibile come la somma di un politopo Q e di un cono poliedrico C ; diremo che P è generato dai punti x^1, \dots, x^s e dalle direzioni v^1, \dots, v^t . Qualora P abbia vertici, l'insieme *minimale* di generatori del politopo Q , ossia l'insieme X tale che $\text{conv}(X) = Q$ e $\text{conv}(X') \neq Q$ per ogni $X' \subset X$, è costituito da tutti e soli i vertici di P .

Analogamente, se $V = \{v^1, \dots, v^t\}$ è una rappresentazione minimale del cono C (la definizione è analoga al caso precedente), allora i vettori v^i sono detti *raggi estremi* di C , e corrispondono geometricamente alle direzioni degli "spigoli illimitati" di P . Osserviamo che, non avendo fatto alcuna

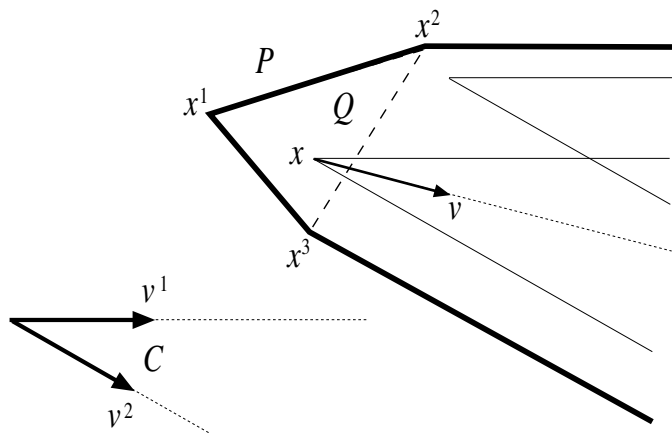


Figura 3.6: Decomposizione di un poliedro

assunzione sulla loro norma, i raggi estremi sono definiti a meno di una costante moltiplicativa non negativa.

Esempio 3.8:

Il poliedro P di Figura 3.4 può essere decomposto tramite i due insiemi finiti $X = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ e $V = \{(1, 0, 0)\}$; quindi $Q = \text{conv}(X)$ è il “lato sinistro” del poliedro, ovvero la faccia $P_{\{1\}}$, mentre $C = \text{cono}(V)$ è il semiasse x_1 positivo, che è parallelo a tutti e quattro gli spigoli illimitati di P .

Ogni poliedro può quindi, a seconda della convenienza, essere visto o come l’intersezione di un numero finito di semispazi o come la somma di un politopo di cui sono dati i vertici e di un cono di cui sono dati i raggi estremi. Occorre tener presente che le due rappresentazioni sono equivalenti in teoria, ma non in pratica: in primo luogo la descrizione del poliedro che è generalmente disponibile è quella per vincoli; in secondo luogo entrambe le descrizioni sono finite ma possono essere di dimensione molto diversa tra loro (si pensi all’ipercubo unitario in \mathbb{R}^n che ha $2n$ vincoli e 2^n vertici).

Il Teorema 3.2 consente comunque di dimostrare che l’insieme delle soluzioni ottime di un problema di PL , se non è vuoto, contiene sempre almeno un vertice.

Teorema 3.3 Siano $P = \{x : Ax \leq b\}$ e $x^1, \dots, x^s, v^1, \dots, v^t \in \mathbb{R}^n$ tali che

$$P = \text{conv}(\{x^1, \dots, x^s\}) + \text{cono}(\{v^1, \dots, v^t\}).$$

Allora, il problema

$$\max\{cx : Ax \leq b\}$$

ha ottimo finito se e solo se $cv^j \leq 0$ per $j = 1, \dots, t$. In questo caso, esiste un $k \in \{1, \dots, s\}$ tale che x^k è una soluzione ottima del problema.

Dimostrazione Per il teorema di decomposizione il problema $\max\{cx : Ax \leq b\}$ è equivalente al seguente problema nelle variabili λ_i e ν_j :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^s \lambda_i (cx^i) + \sum_{j=1}^t \nu_j (cv^j) \\ & \sum_{i=1}^s \lambda_i = 1 \\ & \lambda_i \geq 0 \quad \quad \quad i = 1, \dots, s \\ & \nu_j \geq 0 \quad \quad \quad j = 1, \dots, t. \end{aligned}$$

Questo problema ha ottimo finito se e solo se $cv^j \leq 0$ per $j = 1, \dots, t$. Infatti, se fosse $cv^j > 0$ per un qualche indice j , allora facendo crescere ν_j all'infinito e fissando tutte le altre variabili, il valore della funzione obiettivo crescerebbe anch'esso all'infinito. Viceversa, sia $cv^j \leq 0$, per ogni $j = 1, \dots, t$. Considerando un qualsiasi $x \in P$ ed i corrispondenti λ_i e ν_j , risulta

$$cx = \sum_{i=1}^s \lambda_i (cx^i) + \sum_{j=1}^t \nu_j (cv^j) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i (cx^i) \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i (cx^k) = cx^k$$

dove x^k è tale che $cx^k = \max\{cx^i : i = 1, \dots, s\}$. Quindi il problema ha ottimo finito ed inoltre x^k è una soluzione ottima di $\max\{cx : Ax \leq b\}$. \diamond

Poiché $\text{rango}(A) = n$, è possibile scegliere come x^1, \dots, x^s tutti e soli i vertici del poliedro. Perciò, questo teorema permette di affermare che tra le soluzioni ottime di un problema di *PL*, se ne esistono, c'è sempre almeno un vertice. Ciò rende possibile studiare i problemi di *PL* tramite l'analisi dei soli vertici del poliedro e non di tutta la regione ammissibile.

Esempio 3.9:

Consideriamo i tre vettori costo $c = (-1, 1, 1)$, $c' = (0, 1, 1)$ e $c'' = (1, 1, 1)$ per il poliedro P di Figura 3.4. Siccome $V = \{v_1\}$ con $v_1 = (1, 0, 0)$, il Teorema 3.3 ci garantisce che i problemi di *PL* corrispondenti a c e c' hanno ottimo finito, mentre quello corrispondente a c'' è illimitato.

Infatti, è immediato verificare che l'unica soluzione ottima del problema corrispondente a c è il vertice $(0, 1, 1)$, mentre il problema corrispondente a c' ha infinite soluzioni ottime: tutti i punti dello spigolo "anteriore in alto" del parallelepipedo, ossia la faccia $P_{\{6\}}$, hanno lo stesso valore per la funzione obiettivo, che risulta essere il valore ottimo. Questo corrisponde al fatto che $c'v_1 = 0$. Si noti che, comunque, tra i punti ottimi c'è almeno un vertice.

Per quanto riguarda il problema corrispondente al vettore c'' , non esiste un valore ottimo: dato un qualsiasi punto ammissibile, ad esempio $(0, 0, 0)$, tutti i punti ottenuti muovendosi di un passo $\alpha \geq 0$ lungo il generatore del cono, ossia i punti della forma $(0, 0, 0) + \alpha(1, 0, 0) = (\alpha, 0, 0)$ sono ammissibili ed hanno valore della funzione obiettivo α ; facendo crescere α si ottengono quindi punti ammissibili con valore della funzione obiettivo grande a piacere.

Un ultimo risultato che riguarda la geometria dei poliedri, e che sarà utile nel seguito, mostra come qualsiasi cono finitamente generato possa essere espresso come l'unione di un certo numero di coni più semplici.

Teorema 3.4 Sia $V = \{v^1, \dots, v^t\}$ l'insieme dei generatori del cono $C = \text{cono}(V)$, e sia $v \in C$. Allora, esiste un sottoinsieme $V' \subseteq V$ formato da vettori linearmente indipendenti tale che $v \in \text{cono}(V')$.

Dimostrazione Per definizione, esistono $\nu_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, \dots, t$ tali che

$$v = \sum_{i=1}^t \nu_i v^i.$$

Se v^1, \dots, v^t sono linearmente indipendenti, la tesi è dimostrata. Supponiamo quindi che così non sia: allora, anche i vettori $\nu_i v^i, i = 1, \dots, t$, sono linearmente dipendenti, ossia esistono $\alpha_i, i = 1, \dots, t$, non tutti nulli, tali che

$$\sum_{i=1}^t \alpha_i (\nu_i v^i) = 0. \tag{3.9}$$

Sia $k = \operatorname{argmax}\{\alpha_i : i = 1, \dots, t\}$; cambiando, se necessario, il segno a tutti i coefficienti α_i possiamo supporre $\alpha_k \neq 0$. Definiamo quindi $\bar{\nu}_i = (1 - \alpha_i/\alpha_k)\nu_i$ per ogni $i \neq k$; la scelta di α_k garantisce che $\bar{\nu}_i \geq 0$, ed inoltre risulta

$$\sum_{i \neq k} \bar{\nu}_i v^i = \sum_{i \neq k} (1 - \alpha_i/\alpha_k)\nu_i v^i = \sum_{i \neq k} \nu_i v^i - \sum_{i \neq k} (\alpha_i v^i \nu_i)/\alpha_k = \sum_{i \neq k} \nu_i v^i - (-\alpha_k \nu_k v^k)/\alpha_k = v$$

dove la penultima uguaglianza vale grazie a (3.9). Quindi, v appartiene al cono generato da $t - 1$ dei generatori di C (tutti tranne v^k). Se anche questi sono linearmente dipendenti, è sufficiente ripetere lo stesso procedimento finché non si ottiene un insieme di generatori linearmente indipendenti. \diamond

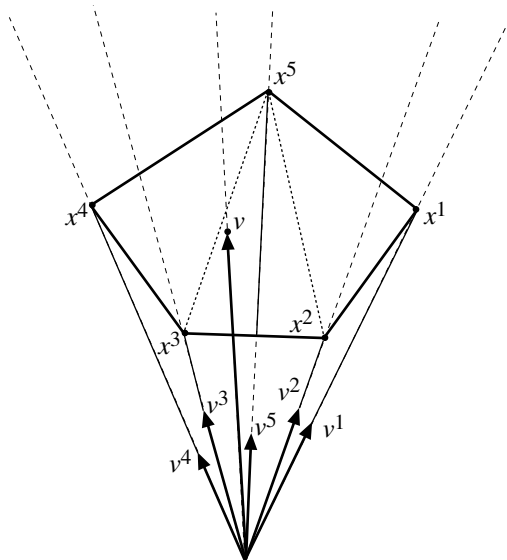


Figura 3.7: Illustrazione del Teorema 3.4

Il Teorema 3.4 è illustrato con un esempio in \mathbb{R}^3 in Figura 3.7: abbiamo $v \in \operatorname{cono}(\{v^1, \dots, v^5\})$ ma anche $v \in \operatorname{cono}(\{v^2, v^3, v^5\})$. Per meglio evidenziare questo, in figura è mostrata una sezione del cono passante per v . Siano x^1, \dots, x^5 i punti di intersezione di questa sezione con le semirette individuate da v^1, \dots, v^5 : v appartiene al triangolo di vertici x^2, x^3 e x^5 . Un cono poliedrico in \mathbb{R}^n con generatori linearmente indipendenti può ovviamente

averne al più n ; se ne ha esattamente n è detto *cono simpliciale*, ed è il cono poliedrico di dimensione massima col minor numero possibile di generatori (in \mathbb{R}^3 , ad esempio, non è possibile ottenere un cono di dimensione tre con meno di tre generatori, i quali devono essere linearmente indipendenti, ossia non appartenenti ad uno stesso piano).

3.2 Teoria Matematica della Dualità

I problemi di *PL* hanno complessità polinomiale: una motivazione risiede nel fatto che esistono metodi efficienti per verificare se una data soluzione sia o meno ottima. In generale, per fare questo servono tecniche che permettano di valutare il valore ottimo della funzione obiettivo del problema. Nel caso di un problema di *PL*, questo avviene con l'ausilio di un altro problema di *PL*, detto *duale* del problema dato.

3.2.1 Coppie di problemi duali

Prima di formalizzare il concetto di problema duale, analizziamo due esempi.

Esempio 3.10: Un problema di dieta

In un allevamento di polli si usano per il mangime due tipi di cereali, A e B . Il mangime deve soddisfare certi requisiti nutritivi: deve contenere almeno 8 unità di carboidrati, 15 unità di proteine e 3 unità di vitamine per unità di peso. Il contenuto unitario di carboidrati, proteine e vitamine ed il costo unitario di A e B sono riportati nella seguente tabella insieme ai requisiti minimi giornalieri.

	A	B	min. giornaliero
carboidrati	5	7	8
proteine	4	2	15
vitamine	2	1	3
costo unitario	1200	750	

Siano x_1 ed x_2 rispettivamente il numero di unità di cereale A e B impiegate nel mangime, il numero di unità di carboidrati presenti nel mangime è dato da $5x_1 + 7x_2$, e poiché il fabbisogno minimo di carboidrati è di 8 unità, deve risultare $5x_1 + 7x_2 \geq 8$; analogamente, per le unità di proteine deve risultare $4x_1 + 2x_2 \geq 15$ e per le unità di vitamine $2x_1 + x_2 \geq 3$. Ai tre vincoli precedenti si devono aggiungere le ovvie condizioni di non negatività delle variabili, $x_1, x_2 \geq 0$; infine la funzione obiettivo è $1200x_1 + 750x_2$. La dieta di costo minimo è data dunque da una soluzione del seguente problema di *PL*:

$$\begin{array}{rcll}
 \min & 1200x_1 & + & 750x_2 \\
 & 5x_1 & + & 7x_2 \geq 8 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 \geq 15 \\
 & 2x_1 & + & x_2 \geq 3 \\
 & x_1, & & x_2 \geq 0
 \end{array}$$

Al problema in esame è "naturalmente" associato un altro problema che chiameremo il *problema del venditore di pillole per polli*: si tratta di stabilire i prezzi di vendita di pillole rispettivamente di carboidrati, proteine e vitamine in modo che il ricavato della vendita sia massimo e che i prezzi siano competitivi, ossia che l'allevatore di polli ritenga

non svantaggioso acquistare le pillole invece dei cereali A e B . Supponiamo che ciascuna pillola contenga un'unità del corrispondente elemento nutritivo, e siano y_1, y_2 e y_3 i prezzi rispettivamente di una pillola di carboidrati, proteine e vitamine: poiché l'allevatore deve percepire la dieta a base di pillole non più costosa della dieta a base di cereali dovrà risultare $5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 1200$, cioè il costo dell'equivalente (da un punto di vista nutritivo) in pillole del cereale A deve essere non superiore a 1200 lire. Analogamente, per il cereale B si ottiene $7y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 750$. I prezzi di vendita devono essere non negativi ed il ricavo della vendita è dato $8y_1 + 15y_2 + 3y_3$ (dato che 8, 15 e 3 sono il minimo numero di pillole di carboidrati, proteine e vitamine necessari alla corretta alimentazione del pollo): il problema del venditore di pillole per polli è dunque

$$\begin{array}{rcl} \max & 8y_1 & + \quad 15y_2 & + \quad 3y_3 \\ & 5y_1 & + \quad 4y_2 & + \quad 2y_3 & \leq & 1200 \\ & 7y_1 & + \quad 2y_2 & + \quad y_3 & \leq & 750 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 \end{array}$$

I due problemi sono riassunti nella seguente tabella

$$\begin{array}{rcc} & x_1 & x_2 & \max \\ y_1 & \boxed{5} & \boxed{7} & \boxed{8} \\ y_2 & \boxed{4} & \boxed{2} & \boxed{15} \\ y_3 & \boxed{2} & \boxed{1} & \boxed{3} \\ & & \leq & \\ \min & \boxed{1200} & \boxed{750} & \end{array}$$

La coppia di problemi appena costruita gode di un'importante proprietà: comunque si scelgano i prezzi y_1, y_2 e y_3 delle pillole, il ricavo del venditore di pillole è sicuramente minore o uguale al costo di *qualsiasi* dieta ammissibile che l'allevatore di polli possa ottenere dai due mangimi. Infatti, i vincoli del venditore di pillole assicurano che le pillole siano più convenienti dei singoli mangimi, e quindi anche di ogni loro combinazione. La proprietà può essere verificata algebricamente nel seguente modo: moltiplicando per x_1 e x_2 i due vincoli del problema del venditore di pillole e sommando le due disequazioni così ottenute, si ha

$$x_1(5y_1 + 4y_2 + 2y_3) + x_2(7y_1 + 2y_2 + y_3) \leq 1200x_1 + 750x_2.$$

Riordinando i termini in modo da mettere in evidenza le variabili y_i , si ottiene

$$y_1(5x_1 + 7x_2) + y_2(4x_1 + 2x_2) + y_3(2x_1 + x_2) \leq 1200x_1 + 750x_2.$$

A questo punto possiamo utilizzare i vincoli del problema della dieta per minorare le quantità tra parentesi, ottenendo

$$8y_1 + 15y_2 + 3y_3 \leq 1200x_1 + 750x_2.$$

Il costo di qualsiasi dieta ammissibile fornisce quindi una valutazione superiore del massimo ricavo del venditore di pillole e analogamente qualsiasi ricavo ammissibile per il venditore di pillole fornisce una valutazione inferiore del costo della miglior dieta possibile. Ciascuno dei due problemi fornisce quindi, attraverso il costo di qualsiasi soluzione ammissibile, una valutazione (inferiore o superiore) del valore ottimo dell'altro problema.

Esempio 3.11: Un problema di trasporto

Un produttore di birra ha n fabbriche e m depositi. Siano:

- a_i il numero di litri di birra prodotti dalla fabbrica i ($i = 1, \dots, n$);
- b_j la capacità del deposito j ($j = 1, \dots, m$), espressa in litri di birra;

- c_{ij} il costo di trasporto di un litro di birra dalla fabbrica i al deposito j , detta *costo unitario* di trasporto;

e assumiamo che sia $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$, cioè che la produzione totale eguagli la capacità totale dei depositi. Si vuole trasportare il prodotto dalle fabbriche ai depositi in modo da minimizzare il costo di trasporto.

Indichiamo con x_{ij} il numero di litri di birra trasportate da i a j . I vincoli, oltre alle ovvie condizioni di non negatività delle variabili ($x_{ij} \geq 0$), impongono che

- dalla fabbrica i venga trasportata tutta la birra prodotta, e cioè $\sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i, \forall i$;
- la birra trasportata al deposito j saturi la sua capacità, e cioè $\sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j, \forall j$.

Il costo di trasporto è $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij}$: il problema può essere quindi formulato come il seguente problema di *PL*:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \\ & \sum_{j=1}^m x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, n \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, m \\ & x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Anche in questo caso possiamo costruire un nuovo problema che utilizza gli stessi dati del problema di trasporto e che è ad esso strettamente legato. Una ditta di trasporti, per ogni coppia (i, j) , offre di comprare la birra alla fabbrica i al prezzo unitario λ_i , rivendendola al deposito j al prezzo unitario μ_j . Il problema di questa ditta è di definire i valori di λ_i e μ_j per ogni (i, j) , in modo da massimizzare il guadagno ottenuto dall'operazione che è dato da $-\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i + \sum_{j=1}^m b_j \mu_j$, con il vincolo che l'offerta fatta risulti per il produttore di birra competitiva rispetto al costo di trasporto cui andrebbe incontro se decidesse di rifiutarla. In base all'offerta della ditta di trasporto, l'industria pagherebbe $-\lambda_i + \mu_j$ il trasporto di un litro di birra da i a j , pertanto dovrà risultare $-\lambda_i + \mu_j \leq c_{ij}$: il problema della ditta di trasporto può quindi essere formulato come il seguente problema di *PL*:

$$\begin{aligned} \max \quad & -\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i + \sum_{j=1}^m b_j \mu_j \\ & -\lambda_i + \mu_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

I due problemi, nel caso di due industrie e tre depositi, sono rappresentati in modo compatto nella seguente tabella, in cui il generico vincolo $\sum_j x_{ij} = a_i$ è stato trasformato nel vincolo equivalente $-\sum_j x_{ij} = -a_i$.

	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{21}	x_{22}	x_{23}		\max
λ_1	-1	-1	-1				=	- a_1
λ_2				-1	-1	-1		- a_2
μ_1	1			1				b_1
μ_2		1			1			b_2
μ_3			1			1		b_3
\min	\leq							
	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{21}	c_{22}	c_{23}		

Ancora una volta, è facile verificare algebricamente che il costo di qualsiasi soluzioni ammissibile di uno dei due problemi fornisce una valutazione del valore ottimo dell'altro:

utilizzando i vincoli del problema della ditta di trasporto si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mu_j - \lambda_i) x_{ij},$$

dopodiché, mettendo in evidenza μ_j e λ_i ed utilizzando i vincoli del problema della fabbrica di birra, si ottiene

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} x_{ij} \geq \sum_{j=1}^m b_j \mu_j - \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i.$$

Nei due esempi precedenti si è visto come, in modo naturale, ad un problema di *PL* è associabile un altro problema di *PL* avente con esso una stretta relazione. Dato un problema di *PL* nella forma

$$\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\} \quad (3.10)$$

possiamo sempre associargli un problema così definito:

$$\min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}. \quad (3.11)$$

I problemi (3.10) e (3.11) costituiscono una *coppia di problemi duali*: spesso (3.10) viene chiamato il *primale* e (3.11) il *duale*. Vale il seguente teorema.

Teorema 3.5 *Il duale del duale è il primale.*

Dimostrazione Il problema (3.11) può essere scritto equivalentemente (vedi le (3.2)) come $-\max\{-yb : -yA \leq -c, y \geq 0\}$; per la definizione, il duale di questo problema è $-\min\{-cx : -Ax \geq -b, x \geq 0\}$, che è equivalente al problema (3.10). \diamond

La coppia di problemi duali che abbiamo introdotto è detta *coppia simmetrica*; una definizione equivalente di coppia di problemi duali si ha con la seguente *coppia asimmetrica*:

$$(P) : \max\{cx : Ax \leq b\} \quad (D) : \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}.$$

Infatti, (P) può essere scritto equivalentemente come

$$\max\{cx^+ - cx^- : Ax^+ - Ax^- \leq b, x^+, x^- \geq 0\}$$

e, applicando la definizione di coppia simmetrica, si ottiene il duale

$$\min\{yb : yA \geq c, -yA \geq -c, y \geq 0\}$$

che è equivalente al problema (D) della coppia asimmetrica.

Esercizio 3.3 *Si dimostri il viceversa, cioè che partendo dalla definizione di coppia asimmetrica si ottiene la definizione di coppia simmetrica.*

Esercizio 3.4 *Si dimostri il teorema 3.5 per la coppia asimmetrica.*

In generale, il duale di un qualunque problema di PL può essere scritto applicando le corrispondenze primali–duali indicate nella seguente tabella, dove A_i e A^j indicano rispettivamente la i -esima riga e la j -esima colonna della matrice A .

max	min
c	b
b	c
$A_i x \leq b_i$	$y_i \geq 0$
$A_i x \geq b_i$	$y_i \leq 0$
$A_i x = b_i$	$y_i \geq 0$
$x_j \geq 0$	$y A^j \geq c_j$
$x_j \leq 0$	$y A^j \leq c_j$
$x_j \geq 0$	$y A^j = c_j$

Esempio 3.12:

Scriviamo il duale del problema

$$\begin{array}{rcll}
 \min & 12y_1 & + & 7y_2 \\
 & 5y_1 & + & 7y_2 & = & 8 \\
 & 4y_1 & + & 2y_2 & \geq & 15 \\
 & 2y_1 & + & y_2 & \leq & 3 \\
 & y_1 & \geq & 0 & &
 \end{array}$$

Poiché il problema è di minimo, il duale è

$$\begin{array}{rcll}
 \max & 8x_1 & + & 15x_2 & + & 3x_3 \\
 & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 12 \\
 & 7x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\
 & & & x_2 & \geq & 0 & & x_3 \leq 0
 \end{array}$$

Esercizio 3.5 *Si dimostrino le relazioni della tabella di pagina 151, a partire sia dalla definizione di coppia simmetrica che da quella di coppia asimmetrica.*

Esempio 3.13:

Si consideri la coppia di problemi duali:

$$\begin{array}{rcll}
 (P) : \max & 3x_1 & - & x_2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
 & & & -x_2 & \leq & 2 \\
 (D) : \min & 4y_1 & + & 5y_2 & + & 2y_3 \\
 & y_1 & - & y_2 & = & 3 \\
 & y_1 & + & y_2 & - & y_3 & = & -1 \\
 & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0
 \end{array}$$

In fig.3.8 è data la rappresentazione della coppia (P, D) sia sotto forma di tabella che sotto forma geometrica. Osserviamo come il duale sia il problema di esprimere il vettore c come combinazione lineare non negativa delle righe A_1, A_2 e A_3 , scegliendo fra i vettori di coefficienti della combinazione lineare uno che abbia peso minimo, dove il peso del coefficiente della j -esima riga è il termine noto (la risorsa) del j -esimo vincolo del primale.

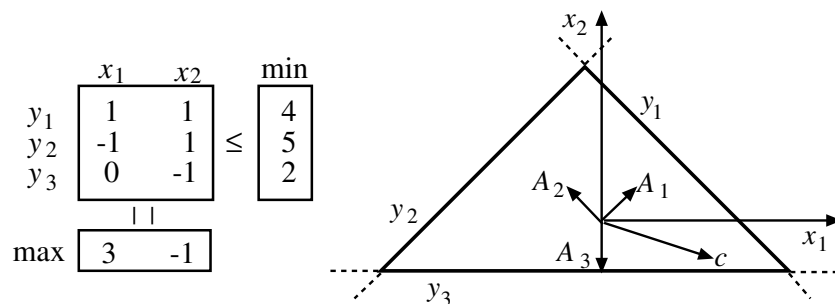


Figura 3.8:

3.2.2 Il teorema debole della dualità

Come già evidenziato negli esempi 3.10 e 3.11, i problemi (P) e (D) non sono legati soltanto da relazioni di tipo sintattico: il seguente teorema fornisce una prima relazione tra i valori delle funzioni obiettivo dei due problemi. Qui, come nel seguito, salvo indicazione contraria useremo la forma asimmetrica della dualità, ma i risultati ottenuti sono indipendenti dalla particolare forma usata.

Teorema 3.6 (Teorema debole della dualità) *Se \bar{x} e \bar{y} sono soluzioni ammissibili per (P) e (D) rispettivamente, allora $c\bar{x} \leq \bar{y}b$.*

Dimostrazione

$$\left. \begin{array}{l} \bar{y}A = c \quad \Rightarrow \quad \bar{y}A\bar{x} = c\bar{x} \\ A\bar{x} \leq b, \bar{y} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{y}A\bar{x} \leq \bar{y}b \end{array} \right\} \Rightarrow c\bar{x} \leq \bar{y}b.$$

◇

Corollario 3.1 *Se (P) è illimitato, allora (D) è vuoto.*

In generale, se (P) e (D) sono non vuoti, si può affermare che

$$\max \{cx : Ax \leq b\} \leq \min \{yb : yA = c, y \geq 0\}.$$

Corollario 3.2 *Se \bar{x} e \bar{y} sono soluzioni ammissibili rispettivamente per (P) e (D) e $c\bar{x} = \bar{y}b$, allora \bar{x} e \bar{y} sono anche soluzioni ottime.*

Ritorniamo al problema della *Pintel*. Abbiamo già evidenziato, con considerazioni puramente geometriche, come il vertice $(4, 1)$ sia la soluzione ottima: possiamo ora utilizzare il teorema debole della dualità per fornire una prova algebrica della sua ottimalità. Per questo, scriviamo il problema ed il suo duale in forma di coppia asimmetrica:

$$\begin{array}{rcl}
\max & 500x_1 & + \quad 200x_2 \\
& x_1 & \leq 4 \\
& & x_2 \leq 7 \\
& 2x_1 & + \quad x_2 \leq 9 \\
& -x_1 & \leq 0 \\
& & -x_2 \leq 0 \\
\\
\min & 4y_1 & + \quad 7y_2 & + \quad 9y_3 \\
& y_1 & & + \quad 2y_3 & - \quad y_4 & & = 500 \\
& & y_2 & + \quad y_3 & & - \quad y_5 & = 200 \\
& y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & \geq 0
\end{array}$$

È facile verificare che la soluzione duale $\bar{y}=(100, 0, 200, 0, 0)$ è ammissibile con $\bar{y}b = 2200$. Il Corollario 3.2 garantisce perciò l'ottimalità della soluzione $\bar{x} = (4, 1)$ per il problema primale, in quanto ha anch'essa valore della funzione obiettivo $c\bar{x} = 2200$; conseguentemente, ciò dimostra anche l'ottimalità di \bar{y} per il problema duale. Pertanto, una soluzione duale ottima fornisce un *certificato di ottimalità* per una soluzione primale ammissibile, e viceversa. Si osservi inoltre che, nel caso in cui i valori delle funzioni obiettivo fossero stati diversi tra loro, il Corollario 3.2 non avrebbe permesso di certificare la non ottimalità delle soluzioni considerate.

3.2.3 Il teorema forte della dualità e sue conseguenze

Data la coppia asimmetrica di problemi duali (P) e (D), sia \bar{x} una soluzione ammissibile per (P). Un vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$ è detto una *direzione ammissibile* per \bar{x} se esiste un $\bar{\lambda} > 0$ per cui $x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\xi$ è ammissibile per (P) per ogni $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$, cioè per ogni $i = 1, \dots, m$ vale

$$A_i x(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i \xi \leq b_i. \quad (3.12)$$

Se $i \in I(\bar{x})$, ovvero $A_i \bar{x} = b_i$, allora (3.12) è verificata se e solo se $A_i \xi \leq 0$. Se invece $i \notin I(\bar{x})$, ovvero $A_i \bar{x} < b_i$, allora (3.12) è verificata da ogni direzione ξ purché il passo λ sia sufficientemente piccolo. Possiamo pertanto caratterizzare algebricamente una direzione ammissibile nel modo seguente:

Proprietà 3.1 ξ è una direzione ammissibile per \bar{x} se e solo se $A_{I(\bar{x})}\xi \leq 0$.

L'insieme di tutte le direzioni ammissibili per \bar{x} è perciò dato dal cono poliedrico

$$C(\bar{x}) := \{ \xi \in \mathbb{R}^n : A_{I(\bar{x})}\xi \leq 0 \}.$$

Si noti che, se \bar{x} è un punto interno al poliedro, cioè tale che $A\bar{x} < b$ e quindi $I(\bar{x}) = \emptyset$, allora risulta $C(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$: qualunque vettore $\xi \in \mathbb{R}^n$ è pertanto una direzione ammissibile per \bar{x} .

Una direzione $\xi \in \mathbb{R}^n$ è una *direzione di crescita* per \bar{x} se è possibile effettuare uno spostamento $\lambda > 0$ lungo ξ che migliori il valore della funzione obiettivo, cioè tale che:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\xi > c\bar{x}.$$

Si osservi che questa relazione è equivalente a $c\xi > 0$ e quindi non dipende dal particolare punto \bar{x} considerato. Possiamo quindi riferirci alle direzioni di crescita indipendentemente dal punto considerato. Da quanto detto, segue la caratterizzazione:

Proprietà 3.2 ξ è una *direzione di crescita* se e solo se $c\xi > 0$.

Nel caso in cui $c = 0$, questa proprietà garantisce che non esistono direzioni di crescita; infatti, la funzione obiettivo vale sempre zero e tutte le soluzioni ammissibili sono quindi ottime.

Quando invece $c \neq 0$, se esiste una direzione ammissibile per \bar{x} che sia anche di crescita, allora \bar{x} non può essere soluzione ottima di (P) . Infatti, in tal caso, sarebbe possibile effettuare uno spostamento $\lambda > 0$ lungo ξ che migliori il valore della funzione obiettivo.

Più precisamente, vale il seguente risultato:

Lemma 3.1 *Sia $c \neq 0$. Una soluzione ammissibile \bar{x} è ottima per (P) se e solo se \bar{x} non ammette direzioni ammissibili ξ che siano anche di crescita.*

Dimostrazione Se \bar{x} è ottima, allora non possono esistere direzioni ammissibili di crescita, come precedentemente mostrato. Viceversa, supponiamo per assurdo che \bar{x} non sia ottima: deve perciò esistere una soluzione ammissibile x' tale che $cx' > c\bar{x}$, cioè tale che $c(x' - \bar{x}) > 0$. Consideriamo la direzione $\xi = x' - \bar{x}$, che è di crescita in quanto $c\xi > 0$. Essa è anche ammissibile per \bar{x} ; infatti

$$x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\xi = \bar{x} + \lambda(x' - \bar{x}) = \lambda x' + (1 - \lambda)\bar{x}$$

appartiene al poliedro $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ per ogni $\lambda \in [0, 1]$ in quanto $\bar{x}, x' \in P$ e P è convesso. Abbiamo pertanto costruito una direzione ammissibile e di crescita per \bar{x} , negando l'ipotesi. \diamond

In particolare, nessun punto \bar{x} interno al poliedro può essere una soluzione ottima per (P) (a meno che sia $c = 0$), in quanto $\xi = c$ costituisce una sua direzione ammissibile di crescita.

Grazie alle Proprietà 3.1 e 3.2, il Lemma 3.1 afferma che una soluzione ammissibile \bar{x} è ottima per (P) se e solo se il sistema

$$\begin{cases} A_{I(\bar{x})}\xi & \leq 0 \\ c\xi & > 0 \end{cases}$$

non ammette soluzione. Questa caratterizzazione è di fondamentale importanza per stabilire un forte legame tra il problema primale ed il suo duale. Introduciamo a tal fine il seguente Lemma, anche noto come *Teorema Fondamentale delle Disuguaglianze Lineari* (per la dimostrazione si consultino, ad esempio, i testi di Murty e Padberg indicati nelle referenze di fine capitolo):

Teorema 3.7 (*Lemma di Farkas, 1902*) *Data una matrice A di dimensione $m \times n$ e un vettore $c \in \mathbb{R}^n$, i due sistemi*

$$(S_P) : \begin{cases} A\xi \leq 0 \\ c\xi > 0 \end{cases} \qquad (S_D) : \begin{cases} yA = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

sono mutuamente esclusivi, cioè o ha soluzione il sistema (S_P) oppure ha soluzione il sistema (S_D) .

Interpretazione geometrica del Lemma di Farkas

I vettori A_1, \dots, A_m individuano il cono $C = \text{cono}(A_1, \dots, A_m)$. Se il sistema (S_D) ha soluzione \bar{y} , allora c può essere espresso come combinazione lineare non negativa dei vettori A_1, \dots, A_m , usando $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m$ come coefficienti, ovvero $c \in C$. Se invece è il sistema (S_P) ad avere una soluzione $\bar{\xi}$, allora l'iperpiano ortogonale a $\bar{\xi}$ e passante per l'origine divide lo spazio in due semispazi, in uno dei quali si trova il vettore c e nell'altro il cono C : si dice che $\bar{\xi}$ *separa* c da C . Questa interpretazione geometrica è illustrata nella Figura 3.9, dove nel caso (a) si ha che $c \in C$, ossia c può essere espresso come combinazione lineare non negativa dei vettori A_i (in effetti utilizzando i soli due vettori A_2 ed A_3 , per cui $c \in \text{cono}(\{A_2, A_3\})$) mentre nel caso (b) è indicato un piano (ortogonale a $\bar{\xi}$) che separa c dal cono C .

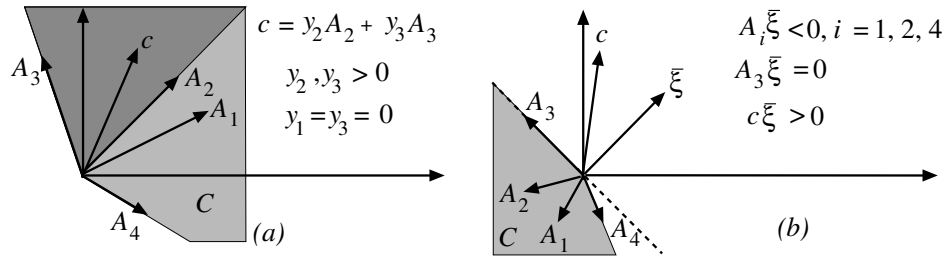


Figura 3.9: Lemma di Farkas

Il teorema forte della dualità

Consideriamo il sistema che caratterizza le direzioni ammissibili di crescita per una soluzione ammissibile \bar{x} e il sistema ad esso associato dal Lemma di

Farkas. Per semplificare la notazione, indichiamo l'insieme degli indici dei vincoli attivi $I(\bar{x})$ mediante il simbolo I . I due sistemi risultano essere:

$$(P_R) : \begin{cases} A_I \xi & \leq 0 \\ c\xi & > 0 \end{cases} \quad (D_R) : \begin{cases} y_I A_I & = c \\ y_I & \geq 0 \end{cases}$$

e verranno indicati, rispettivamente, come *Primale Ristretto* e come *Duale Ristretto* ai soli vincoli attivi. Si noti che per $c = 0$ il sistema (P_R) non può avere soluzioni; infatti, il sistema (D_R) ammette come ovvia soluzione $\bar{y}_I = 0$. Basandoci sul Lemma di Farkas, possiamo caratterizzare l'ottimalità di (P) in termini della risolubilità del sistema duale ristretto.

Corollario 3.3 *Sia \bar{x} una soluzione ammissibile per (P) . Allora, \bar{x} è una soluzione ottima per (P) se e solo se esiste un vettore \bar{y}_I soluzione del sistema (D_R) .*

Vale il seguente risultato:

Teorema 3.8 *(Teorema forte della dualità) Se (P) e (D) ammettono entrambi soluzioni ammissibili, allora*

$$\max\{cx : Ax \leq b\} = \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}.$$

Dimostrazione Poiché (D) ammette soluzioni ammissibili, (P) non può essere illimitato per il Teorema debole della dualità; essendo non vuoto, (P) ha allora ottimo finito. Se $c = 0$, allora $\max\{cx : Ax \leq b\} = 0$, e $y = 0$ è ammissibile per (D) e quindi ottima. Assumiamo perciò $c \neq 0$, e sia \bar{x} una soluzione ottima per (P) con il relativo insieme di indici dei vincoli attivi I che, come osservato in precedenza, deve essere necessariamente non vuoto. Per il Corollario 3.3, il sistema (D_R) ammette almeno una soluzione \bar{y}_I . La soluzione $\bar{y} = (\bar{y}_I, 0)$ è una soluzione ammissibile per (D) poiché $\bar{y}A = \bar{y}_I A_I = c$ e $\bar{y}_I \geq 0$ implica $\bar{y} \geq 0$; inoltre, risulta $\bar{y}b = \bar{y}_I b_I = \bar{y}_I A_I \bar{x} = c\bar{x}$. Per il Teorema debole della dualità \bar{y} è ottima per (D) e la tesi segue. \diamond

Esempio 3.14:

Si consideri la seguente coppia di problemi duali:

$$\begin{array}{ll} (P) \max & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \leq 5 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & -x_1 - x_2 \leq -5 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (D) \min & 5y_1 + 5y_2 + 10y_3 - 5y_4 \\ & y_1 + y_3 - y_4 = 2 \\ & y_2 + y_3 - y_4 = 1 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0 \end{array}$$

Sia $\bar{x} = (5, 5)$ una soluzione ammissibile di (P) , con $c\bar{x} = 15$. L'insieme degli indici dei vincoli attivi è $I = \{1, 2, 3\}$, e $\bar{I} = \{4\}$. Ogni direzione ammissibile e di crescita per \bar{x} deve essere soluzione del sistema $\{A_I \xi \leq 0, c\xi > 0\}$, cioè:

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 & & \leq 0 \\ & \xi_2 & \leq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 & & \leq 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 & & > 0 \end{array}$$

È facile verificare che tale sistema non ha soluzione. Infatti, dovendo essere ξ_1 e ξ_2 entrambe non positive, non è possibile che $2\xi_1 + \xi_2$ risulti positivo. Per il Lemma di Farkas, ha soluzione il sistema duale $\{y_I A_I = c, y_I \geq 0\}$, cioè:

$$\begin{array}{rcl} y_1 & + & y_3 = 2 \\ & y_2 + & y_3 = 1 \\ y_1, & y_2, & y_3, \geq 0 \end{array}$$

Tale sistema duale ha infinite soluzioni; infatti, ponendo $y_3(\lambda) = \lambda$, si ottiene $y_1(\lambda) = 2 - \lambda$ e $y_2(\lambda) = 1 - \lambda$; dalla non negatività delle variabili si ha che il vettore $y_I(\lambda) = (2 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda)$ è una soluzione del sistema duale per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Dall'esistenza di almeno una soluzione del sistema duale si deduce che \bar{x} è una soluzione ottima per (P) . Ponendo $y_I(\lambda) = 0$, si ha $y(\lambda) = (2 - \lambda, 1 - \lambda, \lambda, 0)$. È facile verificare che $y(\lambda)$ è ammissibile per (D) , e quindi ottima, per ogni $\lambda \in [0, 1]$, con valore della funzione obiettivo $y(\lambda)b = 15$. Si noti che $c\bar{x} = y(\lambda)b = 15$.

Abbiamo quindi individuato infinite soluzioni ottime per (D) .

Teorema 3.9 *Se (P) ha ottimo finito, allora (D) ha ottimo finito.*

Dimostrazione Poiché (P) è non vuoto, dal Teorema debole della dualità segue che (D) è limitato inferiormente, e quindi ha ottimo finito se e solo se è non vuoto. Per assurdo, supponiamo $\{y : yA = c, y \geq 0\} = \emptyset$: per il Lemma di Farkas, esiste un vettore ξ tale che $A\xi \leq 0$ e $c\xi > 0$; data una qualsiasi soluzione x ammissibile per (P) , $x + \lambda\xi$ è anch'essa ammissibile per ogni $\lambda > 0$. Quindi, $c\xi > 0$ implica che (P) è superiormente illimitato in contraddizione con l'ipotesi. \diamond

Esercizio 3.6 *Dimostrare il teorema opposto: se (D) ha ottimo finito, allora (P) ha ottimo finito.*

Teorema 3.10 *Data la coppia di problemi duali (P) e (D) , si può verificare uno solo tra i casi indicati con * nella seguente tabella:*

(P)	<i>ottimo finito</i>	<i>illimitato</i>	<i>vuoto</i>
<i>ottimo finito</i>	*		
(D) <i>illimitato</i>			*
<i>vuoto</i>		*	*

Dimostrazione Il seguente esempio mostra che, se (P) è vuoto, (D) può essere vuoto, come è immediato verificare geometricamente:

$$\begin{array}{l} (P) : \quad \max\{x_1 + 2x_2 : -x_1 - x_2 \leq -1, x_1 + x_2 \leq -1, x_1 \leq 0\} \\ (D) : \quad \min\{-y_1 - y_2 : -y_1 + y_2 + y_3 = 1, -y_1 + y_2 = 2, y_1, y_2, y_3 \geq 0\}. \end{array}$$

Il completamento della dimostrazione è lasciato per esercizio. \diamond

3.2.4 Il teorema degli scarti complementari

I teoremi debole e forte della dualità permettono di caratterizzare l'ottimalità di una coppia di soluzioni di (P) e (D) . Più precisamente, il Corollario 3.2 e il Teorema 3.8 garantiscono che, date una soluzione \bar{x} ammissibile per (P) e una soluzione \bar{y} ammissibile per (D) , queste sono ottime se e solo se i valori delle rispettive funzioni obiettivo coincidono, ovvero $c\bar{x} = \bar{y}b$.

Poiché la catena di equivalenze

$$c\bar{x} = \bar{y}b \iff \bar{y}A\bar{x} = \bar{y}b \iff \bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$$

vale quando $\bar{y}A = c$ indipendentemente dall'eventuale ammissibilità delle soluzioni, la seguente definizione risulterà utile nel seguito.

Definizione 3.1 Dati $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$, la coppia di soluzioni (\bar{x}, \bar{y}) è detta una *coppia di soluzioni complementari* se $\bar{y}A = c$ e se viene verificata la seguente proprietà, detta degli *scarti complementari*:

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0. \quad (3.13)$$

Si noti che la definizione non richiede l'ammissibilità delle soluzioni; qualora siano entrambe ammissibili, ciò è sufficiente a garantirne l'ottimalità. Infatti, da quando detto sopra si deduce immediatamente il seguente teorema, noto come *Teorema degli scarti complementari*:

Teorema 3.11 *Date due soluzioni \bar{x} e \bar{y} , ammissibili rispettivamente per (P) e (D) , esse sono ottime se e solo se verificano le condizioni degli scarti complementari (3.13).*

L'equazione (3.13) può essere riscritta esplicitando il prodotto scalare

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0,$$

che è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

quando \bar{x} e \bar{y} sono ammissibili rispettivamente per (P) e (D) . Infatti, l'ammissibilità implica che ciascun termine $\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x})$ è non negativo, e la somma di m termini non negativi è zero se e solo se ciascun addendo è zero. Quindi, nel caso in cui le due soluzioni siano ammissibili, la proprietà degli scarti complementari (3.13) può essere espressa tramite le implicazioni

$$\begin{aligned} \bar{y}_i > 0 &\Rightarrow A_i\bar{x} = b_i, \\ A_i\bar{x} < b_i &\Rightarrow \bar{y}_i = 0, \end{aligned} \quad i = 1, \dots, m.$$

Per poter utilizzare il teorema degli scarti complementari direttamente, è necessario avere sia una soluzione primale sia una soluzione duale. Comunque, quando sia nota soltanto una soluzione primale ammissibile, è possibile verificare se sia ottima o meno tramite la ricerca di una soluzione duale ammissibile, che formi con essa una coppia di soluzioni complementari. Infatti, vale la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale.

Proposizione 3.1 *Sia \bar{x} una soluzione ammissibile per (P). Allora, \bar{x} è ottima se e solo se esiste \bar{y} ammissibile per (D) complementare a \bar{x} (ovvero tale che (\bar{x}, \bar{y}) sia una coppia di soluzioni complementari).*

Dimostrazione La parte “se” del teorema è un'immediata conseguenza del teorema degli scarti complementari. Consideriamo allora il caso in cui \bar{x} sia una soluzione ottima per (P): per il Teorema 3.9 esiste una soluzione \bar{y} ottima per (D) e per il Teorema 3.8 si ha $c\bar{x} = \bar{y}b$, ovvero vale (3.13) e quindi (\bar{x}, \bar{y}) è una coppia di soluzioni complementari. \diamond

Una soluzione ammissibile \bar{y} complementare a \bar{x} soddisfa

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

e quindi deve valere $\bar{y}_i = 0$ per ogni $i \in \bar{I} = \{1, \dots, m\} \setminus I$, ovvero $\bar{y}_{\bar{I}} = 0$, dove $I = I(\bar{x})$ indica l'insieme degli indici dei vincoli attivi. Poiché $\bar{y}A = c$, risulta anche $\bar{y}_I A_I = c$ e pertanto \bar{y}_I è una soluzione del Duale Ristretto (D_R). Ritroviamo quindi che \bar{x} è una soluzione ottima se e solo se esiste una soluzione \bar{y}_I del Duale Ristretto (D_R), come già espresso dal Corollario 3.3.

Esempio 3.15:

Si consideri la seguente coppia di problemi duali:

$$\begin{array}{ll} (P) : \max & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \leq 3 \\ -x_1 & \leq 0 \\ & -x_2 \leq 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (D) : \min & 5y_1 + 4y_2 + 3y_3 \\ & y_1 + y_2 - y_4 = 1 \\ & y_1 + y_3 - y_5 = 2 \\ & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{array}$$

La soluzione ottima di (P) è $\bar{x} = (2, 3)$ ed il valore della funzione obiettivo è 8, come si può verificare dalla figura 3.10. Per la proprietà degli scarti complementari si ha

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 < 4 &\Rightarrow \bar{y}_2 = 0, \\ -\bar{x}_1 < 0 &\Rightarrow \bar{y}_4 = 0, \\ -\bar{x}_2 < 0 &\Rightarrow \bar{y}_5 = 0. \end{aligned}$$

Quindi, le componenti non nulle di una possibile soluzione ottima \bar{y} di (D) devono soddisfare il sistema

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ y_1 + y_3 &= 2. \end{aligned}$$

L'unica soluzione possibile è la soluzione ammissibile $\bar{y} = (1, 0, 1, 0, 0)$, che difatti ha valore della funzione obiettivo pari a 8.

Se invece il vettore dei costi di (P) fosse stato $c' = (3, -1)$, il sistema sarebbe stato

$$\begin{aligned} y_1 &= 3 \\ y_1 + y_3 &= -1 \end{aligned}$$

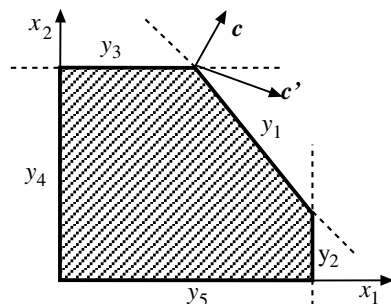


Figura 3.10:

e di conseguenza l'unica soluzione \bar{y} che avrebbe rispettato gli scarti complementari con \bar{x} sarebbe stata $(3, 0, -4, 0, 0)$, che non è ammissibile: questo dimostra *algebricamente* che $(2, 3)$ non è ottima per il problema con vettore dei costi c' , come è facile verificare *geometricamente* dalla figura 3.10.

Analogamente, è possibile verificare l'ottimalità di una soluzione duale tramite la ricerca di una soluzione primale ammissibile ad essa complementare.

Proposizione 3.2 *Sia \bar{y} una soluzione ammissibile per (D). Allora, \bar{y} è ottima se e solo se esiste \bar{x} ammissibile per (P) complementare a \bar{y} .*

Tutti i risultati precedenti sono validi per la coppia asimmetrica di problemi duali; tuttavia, si possono definire opportunamente condizioni degli scarti complementari per coppie duali in qualsiasi forma; ad esempio, il seguente corollario fornisce quelle per la coppia simmetrica di problemi duali.

Corollario 3.4 *Siano \bar{x} e \bar{y} soluzioni ammissibili rispettivamente per (3.10) e (3.11), ovvero la coppia simmetrica*

$$\max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\} \quad \min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$$

allora \bar{x} e \bar{y} sono soluzioni ottime se e solo se

$$\begin{aligned} \bar{y}(b - A\bar{x}) &= 0, \\ (\bar{y}A - c)\bar{x} &= 0. \end{aligned}$$

Esercizio 3.7 *Dimostrare il corollario 3.4.*

Interpretazione economica del teorema degli scarti complementari

Il problema (P) si interpreta naturalmente come il problema di utilizzare le risorse disponibili (vettore b), distribuendole fra un dato insieme di attività in modo da massimizzare il profitto: ogni colonna della matrice A corrisponde ad un'attività, ed il valore della corrispondente variabile x_j fornisce

il livello dell'attività. In questa interpretazione, ciascun coefficiente a_{ij} della matrice A indica quante unità della risorsa i sono necessarie per effettuare un'unità dell'attività j ; per questo A viene anche chiamata *matrice delle tecnologie*.

Sia \bar{x} una soluzione ottima di (P) e \bar{y} una soluzione ottima di (D) . Consideriamo adesso una piccola variazione del vettore b , della forma $b(\varepsilon) = b + \varepsilon$, che lasci la soluzione ottima nell'intersezione degli iperpiani in cui era precedentemente (vedi figura 3.11).

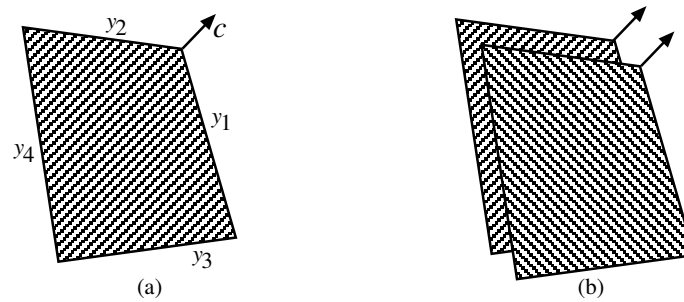


Figura 3.11:

Chiaramente, l'aver modificato i termini noti non ha alcun effetto sulla ammissibilità di \bar{y} ; inoltre, indicando con $\bar{x}(\varepsilon)$ il nuovo valore assunto da \bar{x} , le condizioni del Teorema degli scarti complementari valgono anche per la coppia di soluzioni $\bar{x}(\varepsilon)$ e \bar{y} . In altre parole, $\bar{x}(\varepsilon)$ e \bar{y} sono soluzioni ottime, e la variazione del problema primale non ha avuto effetto sulla soluzione ottima del duale. Tale variazione ha però effetto sul valore della funzione obiettivo, che diventa $c\bar{x}(\varepsilon) = \bar{y}(b + \varepsilon) = \bar{y}b + \bar{y}\varepsilon$.

Pertanto, nelle ipotesi fatte, il vettore \bar{y} rappresenta il *gradiente* del valore ottimo della funzione obiettivo espresso in funzione della variazione ε di b , calcolato nell'origine ($\varepsilon = 0$). La singola componente \bar{y}_i fornisce la variazione di valore ottimo della funzione obiettivo per una variazione unitaria³ del valore della i -esima risorsa, pertanto essa indica il massimo valore che è ragionevole pagare per disporre di un'unità aggiuntiva di tale risorsa: in questo senso si dice che i valori ottimi delle variabili duali forniscono i *valori marginali* (detti anche *prezzi o costi ombra*) delle risorse. I valori ottimi delle variabili duali forniscono una valutazione del valore relativo che hanno le diverse risorse in quanto utilizzate nel processo produttivo definito dal problema (P) . Risulta pertanto comprensibile come la variabile duale corrispondente ad un vincolo soddisfatto all'ottimo come disuguaglianza stretta (nell'esempio di figura 3.11 (a), y_3 e y_4 , corrispondenti alle risorse b_3 e b_4), cioè ad una risorsa sovrabbondante, debba avere valore ottimo nullo.

Riprendiamo, per esemplificare i concetti esposti, il problema della Pintel: i punti $(4, 1)$ e $(100, 0, 200, 0, 0)$ sono rispettivamente soluzioni ottime del

³Naturalmente nell'ipotesi che una tale variazione non alteri la soluzione ottima del duale.

primale e del duale, con valore della funzione obiettivo pari a 2200. Chiediamoci adesso cosa accadrebbe se il reparto tecnico fosse in grado, noleggiando altri macchinari, di aumentare la produzione settimanale di wafers del 10%, portandola a 3300 unità: questo cambierebbe il terzo vincolo in

$$2x_1 + x_2 \leq 9.9$$

(la risorsa aumenta del 10%), lasciando tutti gli altri inalterati.

Come si vede nella figura 3.12, questo corrisponde graficamente a traslare la faccia corrispondente al terzo vincolo nel verso di A_3 , cosicché il vertice intersezione delle facce corrispondenti al primo ed al terzo vincolo si sposta nel punto $(4, 1.9)$. Poiché non sono cambiati i vincoli attivi, né i vincoli del duale, la soluzione $(100, 0, 200, 0, 0)$ continua ad essere ammissibile per il duale. Essa inoltre soddisfa le condizioni degli scarti complementari con la nuova soluzione primale $(4, 1.9)$: infatti, il vettore c è ancora esprimibile come combinazione non negativa dei gradienti del primo e del terzo vincolo, con gli stessi coefficienti. Pertanto, il vertice intersezione delle facce corrispondenti al primo ed al terzo vincolo continua ad essere ottimo: la posizione del vertice in \mathbb{R}^2 è però diversa, ed infatti cambia il valore della funzione obiettivo, che è ora 2380. Osserviamo che l'incremento è dato dal valore della variabile duale corrispondente al terzo vincolo (200) per l'incremento della terza risorsa (0.9); quindi, è possibile stimare se il noleggio dei nuovi macchinari sia o no conveniente confrontando il costo di noleggio con il prezzo ombra del vincolo corrispondente ai wafer.

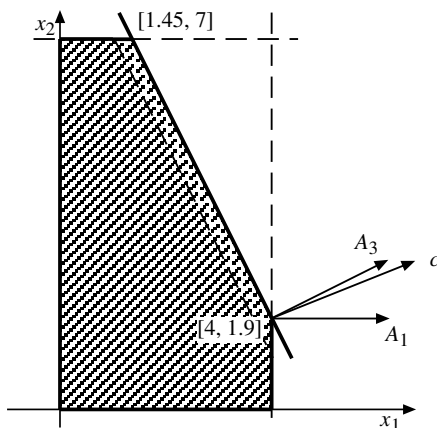


Figura 3.12: Cambiamento di dati nel problema della Pintel

Si noti che lo stesso ragionamento potrebbe essere ripetuto per tutti gli altri vincoli del primale, anche quelli che non sembrano rappresentare risorse nel problema reale. Si consideri ad esempio il caso in cui il reparto Marketing della Pintel fosse in grado, attraverso un'opportuna campagna pubblicitaria, di garantire la vendita di 100.000 Pintium in più del previsto,

aumentando la “prima risorsa” di un’unità; il valore marginale del secondo vincolo potrebbe essere usato per stimare la convenienza dell’operazione, noti i costi della campagna pubblicitaria. È però necessario rilevare che il corretto uso dei prezzi ombra richiede cautela: bisogna sempre verificare che la soluzione primale resti ammissibile, e quindi ottima, in corrispondenza al previsto aumento di risorse. Ad esempio, l’aumento di un’unità della “prima risorsa”, trasformando il primo vincolo in $x_1 \leq 5$, porterebbe l’intersezione del primo e terzo vincolo nel punto $(5, -1)$, che non è ammissibile: è facile vedere che, per via del vincolo 3, il massimo incremento della prima risorsa che produce un effettivo miglioramento del valore della funzione obiettivo è pari a 0.5. È comunque possibile, sfruttando alcune informazioni fornite dagli algoritmi che vedremo nel prossimo paragrafo, stimare l’intervallo in cui la variazione di una risorsa porta ad un miglioramento della funzione obiettivo esattamente pari a quello previsto dal prezzo ombra.

3.2.5 Soluzioni complementari e basi

Data la coppia asimmetrica di problemi duali, abbiamo già visto che ad una base B vengono associati la matrice di base A_B ed il punto $\bar{x} = A_B^{-1}b_B \in \mathbb{R}^n$, che è detto *soluzione primale di base*; nel caso sia ammissibile, \bar{x} corrisponde ad un vertice del poliedro che individua la regione ammissibile di (P) . Vogliamo costruire una soluzione duale che formi con \bar{x} una coppia di soluzioni complementari: considerando anche l’insieme degli indici non in base $N = \{1, \dots, m\} \setminus B$, possiamo associare alla base B la *soluzione duale di base*

$$\bar{y} = (\bar{y}_B, \bar{y}_N) = (cA_B^{-1}, 0).$$

Tale soluzione soddisfa per costruzione la proprietà $\bar{y}A = c$ richiesta dalla Definizione 3.1; restano da verificare le condizioni degli scarti complementari.

Proposizione 3.3 *La coppia di soluzioni associate ad una base B soddisfa le condizioni degli scarti complementari (3.13).*

Dimostrazione Siano B una base, $\bar{x} = A_B^{-1}b_B$ e $\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0)$ le soluzioni associate:

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = (cA_B^{-1}, 0) \begin{pmatrix} b_B - A_B\bar{x} \\ b_N - A_N\bar{x} \end{pmatrix} = cA_B^{-1}(b_B - A_B\bar{x}) = cA_B^{-1}b_B - c\bar{x} = c\bar{x} - c\bar{x} = 0.$$

◇

Le soluzioni \bar{x} e \bar{y} associate ad una base vengono pertanto dette *soluzioni di base complementari*; quando siano entrambe ammissibili, il teorema degli scarti complementari garantisce la loro ottimalità. Inoltre, \bar{x} e \bar{y} risultano essere soluzioni di base *ammissibili, non ammissibili, degeneri o non degeneri* se verificano le condizioni riportate nella seguente tabella:

	\bar{x}	\bar{y}
<i>Ammissibile</i>	$A_N \bar{x} \leq b_N$	$\bar{y}_B \geq 0$
<i>Non ammissibile</i>	$\exists i \in N : A_i \bar{x} > b_i$	$\exists i \in B : \bar{y}_i < 0$
<i>Degenera</i>	$\exists i \in N : A_i \bar{x} = b_i$	$\exists i \in B : \bar{y}_i = 0$
<i>Non degenera</i>	$\forall i \in N : A_i \bar{x} \neq b_i$	$\forall i \in B : \bar{y}_i \neq 0$

Una base B è detta primale [duale] ammissibile, non ammissibile, degenera o non degenera a seconda che lo sia la soluzione di base primale [duale] ad essa associata. Si può dimostrare che anche \bar{y} è un vertice della regione ammissibile di (D) nel caso in cui sia ammissibile.

Esempio 3.16: Soluzioni di base complementari

Si consideri la coppia di problemi duali rappresentata nella tabella e nel grafico di figura 3.13.

	x_1	x_2		\min
y_1	-2	1	\leq	1
y_2	1	-2		-4
y_3	1	0		8
y_4	1	1		14
y_5	0	-1		-4
\max	1	3		

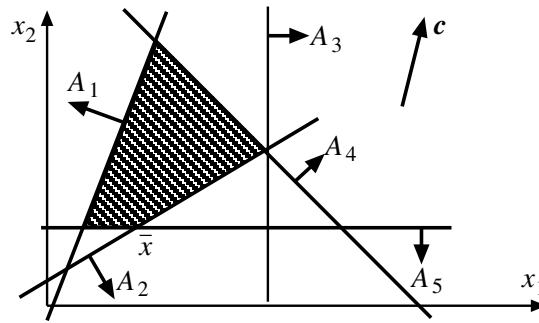


Figura 3.13:

Per $B = \{2, 5\}$, si ha

$$A_B = A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Si ha quindi $A_1 \bar{x} = -4 < 1$, $A_3 \bar{x} = 4 < 8$ e $A_4 \bar{x} = 8 < 14$, cioè \bar{x} è una soluzione di base primale ammissibile; la corrispondente \bar{y} è data da

$$\bar{y} = [\bar{y}_B \ 0] \text{ dove } \bar{y}_B = c A_B^{-1} = [1 \ -5],$$

e quindi non è ammissibile ($\bar{y}_5 = -5 < 0$). Si noti che \bar{x} e \bar{y} sono soluzioni non degeneri.

Consideriamo adesso il problema di stabilire se una data soluzione primale \bar{x} sia una soluzione di base: dato l'insieme I degli indici dei vincoli attivi, si ha che \bar{x} è una soluzione di base se e solo se $\text{rango}(A_I) = \text{rango}(A) = n$. Infatti, $\text{rango}(A_I) = n$ implica che esista $B \subseteq I$ tale che $|B| = n$ e $\det(A_B) \neq 0$, e quindi $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$. Se $|I| = n$, allora $B = I$ e \bar{x} è una soluzione di base *non degenera*. In questo caso, esiste un solo vettore \bar{y} tale che (\bar{x}, \bar{y}) sia una coppia di soluzioni di base complementari; infatti la matrice di base A_B associata a \bar{x} è univocamente determinata, e di conseguenza è univocamente determinato il vettore \bar{y} . Viceversa, se $|I| > n$, allora \bar{x} è una soluzione *degenera*: in questo caso più matrici di base possono corrispondere a \bar{x} , e conseguentemente più soluzioni di base di (D) possono costituire con \bar{x} una coppia di soluzioni complementari.

Esempio 3.17: Soluzioni primali degeneri

Nel problema dell'esempio precedente, si consideri $\bar{x} = (8, 6)$: si ha

$$\begin{aligned} A_1 \bar{x} &= -10 < 1 \\ A_2 \bar{x} &= -4 = -4 \\ A_3 \bar{x} &= 8 = 8 \\ A_4 \bar{x} &= 14 = 14 \\ A_5 \bar{x} &= -6 < -4 \end{aligned}$$

e quindi \bar{x} è ammissibile e soddisfa come equazione i vincoli 2, 3 e 4, cioè $I = \{2, 3, 4\}$. \bar{x} è quindi una soluzione di base degenera, cui corrispondono le basi $B' = \{2, 3\}$, $B'' = \{2, 4\}$ e $B''' = \{3, 4\}$, come è facilmente possibile verificare.

Le soluzioni duali complementari corrispondenti a \bar{x} sono

$$\bar{y}' = (0, -3/2, 5/2, 0, 0) \quad \bar{y}'' = (0, -2/3, 0, 5/3, 0) \quad \bar{y}''' = (0, 0, -2, 3, 0)$$

nessuna delle quali è ammissibile per (D); si ha comunque $c\bar{x} = \bar{y}'b = \bar{y}''b = \bar{y}'''b = 26$.

Consideriamo adesso il problema di stabilire se una data soluzione duale \bar{y} , tale che $\bar{y}A = c$, sia una soluzione di base: dato $J = J(\bar{y}) = \{j : \bar{y}_j \neq 0\}$, si ha che \bar{y} è una soluzione di base se e solo se tutte le righe di A_J sono linearmente indipendenti. Infatti, se $|J| = n$ allora la matrice di base corrispondente a \bar{y} è $A_B = A_J$. In questo caso esiste un solo vettore \bar{x} tale (\bar{x}, \bar{y}) sia una coppia di soluzioni di base complementari; infatti la matrice di base A_B associata a \bar{y} è univocamente determinata e di conseguenza è univocamente determinato il vettore \bar{x} . Se $|J| < n$, allora \bar{y} è una soluzione degenera: a tale soluzione corrispondono più matrici di base, ottenute aggiungendo $n - |J|$ righe di A alla matrice A_J in modo che la matrice A_B risultante abbia determinante non nullo (tali righe esistono per l'ipotesi che $\text{rank}(A) = n$). Conseguentemente, più soluzioni di base \bar{x} di (P) possono costituire con \bar{y} una coppia di soluzioni complementari.

Esempio 3.18: Soluzioni duali degeneri

Si consideri il problema degli esempi precedenti con una diversa funzione obiettivo, data da $c = (1, 1)$, e sia $\bar{y} = (0, 0, 0, 1, 0)$, cosicché $\bar{y}b = 14$. \bar{y} è una soluzione ammissibile di base degenera per (D): infatti risulta $J = \{4\}$. Si può facilmente verificare che le basi per \bar{y} sono $B' = \{1, 4\}$, $B'' = \{2, 4\}$, $B''' = \{3, 4\}$ e $B'''' = \{5, 4\}$, infatti risulta $cA_{B'}^{-1} = cA_{B''}^{-1} = cA_{B'''}^{-1} = cA_{B''''}^{-1} = (0, 1)$. Le soluzioni primali di base complementari a \bar{y} sono riportate nella seguente tabella:

$\bar{x}' = (13/3, 29/3)$	$\bar{x}'' = \bar{x}''' = (8, 6)$	$\bar{x}'''' = (10, 4)$
(ammissibile)	(ammissibile degenera)	(non ammissibile)

In assenza di degenerazione, ad una soluzione di base è pertanto associata una sola base ed una sola soluzione di base complementare. In questo caso è possibile verificare se la soluzione sia ottima o meno tramite l'ammissibilità della soluzione complementare.

Teorema 3.12 *Siano \bar{x} una soluzione di base primale ammissibile non degenera e B la corrispondente base. Allora, \bar{x} è ottima se e solo se la soluzione duale complementare $\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0)$ è ammissibile.*

Dimostrazione La parte “se” del teorema segue immediatamente dalla Proposizione 3.3 e dal teorema degli scarti complementari. Consideriamo allora il caso in cui \bar{x} sia una soluzione ottima. Per la Proposizione 3.1 esiste una soluzione duale ammissibile \bar{y} complementare a \bar{x} e quindi valgono le condizioni degli scarti complementari (3.13). Poiché \bar{x} è non degenere e quindi $I = B$, risulta $\bar{y}_I = \bar{y}_N = 0$. Dall’ammissibilità di \bar{y} segue che $\bar{y}_B A_B = c$, ovvero $\bar{y}_B = cA_B^{-1}$. Quindi, \bar{y} è la soluzione duale di base associata a B . \diamond

È possibile dimostrare l’analogia caratterizzazione dell’ottimalità di una soluzione di base duale non degenere.

Teorema 3.13 *Siano \bar{y} una soluzione di base duale ammissibile non degenera e B la corrispondente base. Allora, \bar{y} è ottima se e solo se la soluzione primale complementare $\bar{x} = A_B^{-1}b_B$ è ammissibile.*

Nel caso di soluzioni di base degeneri, invece, l’ammissibilità della soluzione di base complementare fornisce soltanto una condizione sufficiente di ottimalità, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.19: Condizioni di ottimo in presenza di degenerazione

Si considerino, per il problema in figura 3.14, la soluzione di base \bar{x} tale che $I = \{1, 2, 3\}$ e le basi $B' = \{1, 2\}$, $B'' = \{1, 3\}$ e $B''' = \{2, 3\}$. Si ha che:

$$\begin{aligned} c \in \text{cono}(A_1, A_2) &\Rightarrow \bar{y}_{B'} \geq 0 \\ c \in \text{cono}(A_1, A_3) &\Rightarrow \bar{y}_{B''} \geq 0 \\ c \notin \text{cono}(A_2, A_3) &\Rightarrow \bar{y}_{B'''} \not\geq 0; \end{aligned}$$

quindi, $A_{B'''}$ non soddisfa la condizione di ottimo, pur essendo \bar{x} una soluzione ottima.

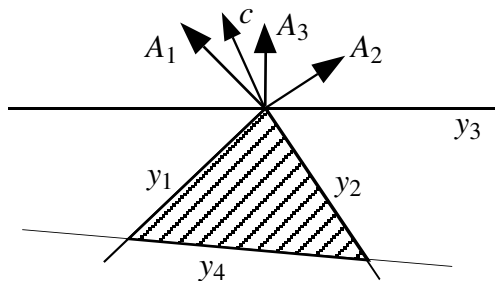


Figura 3.14: Esempio di soluzione ottima degenera

In presenza di degenerazione, ad una soluzione di base corrispondono più soluzioni complementari, una per ciascuna base. Può essere quindi necessario analizzarle tutte per verificare l’ottimalità della soluzione data.

Teorema 3.14 *Sia \bar{x} una soluzione di base primale ammissibile. Allora, \bar{x} è ottima se e solo se esiste una base B associata a \bar{x} tale che la soluzione duale complementare $\bar{y} = (cA_B^{-1}, 0)$ sia ammissibile.*

Dimostrazione

La parte “se” del teorema segue immediatamente dalla Proposizione 3.3 e dal teorema degli scarti complementari. Consideriamo allora il caso in cui \bar{x} sia una soluzione ottima. Per la Proposizione 3.1 esiste una soluzione duale ammissibile \bar{y} complementare a \bar{x} e quindi, per le condizioni degli scarti complementari (3.13), risulta $\bar{y}_I = 0$, da cui segue che $J = \{j : \bar{y}_j \neq 0\} \subseteq I$, $\bar{y}_J A_J = c$ e $\bar{y}_J \geq 0$, ovvero $c \in \text{cono}(A_J)$.

Se le righe di A_J sono linearmente indipendenti, abbiamo $|J| \leq n$ e, poiché $\text{rank}(A_I) = n$, possiamo ottenere una base B aggiungendo a A_J opportuni $n - |J|$ indici di $I \setminus J$; \bar{x} e \bar{y} sono le corrispondenti soluzioni di base e la tesi è dimostrata. Se invece le righe di A_J sono linearmente dipendenti, allora per il Teorema 3.4 esiste un sottoinsieme $J' \subseteq J$ tale che le righe di $A_{J'}$ sono linearmente indipendenti e $c \in \text{cono}(A_{J'})$; perciò, la tesi segue come nel caso precedente. \diamond

Nel caso in cui la soluzione \bar{x} considerata sia non degenera, il teorema coincide con il Teorema 3.12 precedentemente dimostrato.

Qualora \bar{x} sia ottima, la base B individuata dal teorema garantisce che $\bar{y}_B = cA_B^{-1}$ sia l'unica soluzione del sistema

$$(D_B) : \begin{cases} y_B A_B = c \\ y_B \geq 0. \end{cases}$$

Infatti, l'invertibilità di A_B assicura che cA_B^{-1} sia l'unica soluzione del sistema di equazioni $y_B A_B = c$, mentre l'ammissibilità garantisce che tutte le sue componenti siano non negative. Pertanto, le caratterizzazioni fornite dal Teorema 3.14 e dal Corollario 3.3 dimostrano che, nel caso di una soluzione di base, il Duale Ristretto (D_R) ammette soluzione se e solo se esiste una base $B \subseteq I$ tale che il sistema (D_B) ammetta soluzione. Ciò permette di studiare la risolubilità del Duale Ristretto (D_R) tramite quella dei sistemi (D_B) al variare di $B \subseteq I$; si osservi che tali sistemi sono facili da studiare in quanto basta verificare se l'unica possibile soluzione, ovvero cA_B^{-1} , sia a componenti non negative. In conclusione, l'alternativa tra il Primale Ristretto (P_R) e il Duale Ristretto (D_R) può essere ricondotta a quella tra le coppie di *sistemi ristretti di base*

$$(P_B) : \begin{cases} A_B \xi \leq 0 \\ c\xi > 0 \end{cases} \quad (D_B) : \begin{cases} y_B A_B = c \\ y_B \geq 0 \end{cases}$$

al variare di $B \subseteq I$. Nell'esempio 3.19 la soluzione \bar{x} è ottima ma la base B''' non permette di accorgersene in quanto $\bar{y}_{B'''}$ non risolve ($D_{B'''}$) mentre $\bar{y}_{B'}$ e $\bar{y}_{B''}$ risolvono rispettivamente ($D_{B'}$) e ($D_{B''}$). Aggiungendo $|I| - n$ componenti nulle a $\bar{y}_{B'}$ e $\bar{y}_{B''}$ si ottengono due distinte soluzioni di (D_R).

È possibile dimostrare l'analoga caratterizzazione dell'ottimalità di una soluzione di base duale in presenza di eventuale degenerazione.

Teorema 3.15 *Sia \bar{y} una soluzione di base duale ammissibile. Allora, \bar{y} è ottima se e solo se esiste una base B associata a \bar{y} tale che la soluzione primale complementare $\bar{x} = A_B^{-1} b_B$ sia ammissibile.*

Esercizio 3.8 *Costruire esempi di problemi (P) , (D) rappresentabili in \mathbb{R}^2 aventi soluzione ottima degenere, individuando una matrice di base che non soddisfi le condizioni di ottimo.*

Esercizio 3.9 *Costruire, se esiste, una coppia di problemi (P) , (D) tale che le soluzioni ottime \bar{x} e \bar{y} siano entrambe degeneri.*

Esercizio 3.10 *Dimostrare il seguente teorema: Se (P) [(D)] ammette più soluzioni ottime di base, allora la soluzione ottima di base di (D) [(P)] è degenere.*

3.3 Algoritmi del Simplexso

La teoria della dualità sviluppata nel paragrafo precedente fornisce gli strumenti per la costruzione di un algoritmo per la soluzione dei problemi di PL , che chiameremo genericamente *algoritmo del simplexso*. Questo algoritmo costituisce il primo approccio computazionalmente efficiente per la soluzione di problemi di PL ; originalmente proposto da G.B. Dantzig [1951] a partire da un'idea di J. Von Neuman, il metodo del simplexso è stato sviluppato in diverse versioni e sta alla base dei più diffusi codici di PL . Quelle che presenteremo sono solamente alcune delle diverse varianti del metodo sviluppate a partire dall'algoritmo originale di Dantzig.

3.3.1 L'algoritmo del Simplexso Primale

L'algoritmo del simplexso considera l'insieme dei vertici del problema primale e, ad ogni passo, cerca un vertice che migliori il valore della funzione obiettivo. L'individuazione di un tale vertice richiede la determinazione di una direzione ammissibile di crescita, come evidenziato nel paragrafo 3.2.3.

Prima di introdurre formalmente l'algoritmo, ne delineeremo la struttura mediante un esempio. Riprendiamo per questo il problema della Pintel, e consideriamo il vertice $\bar{x} = (1, 7)$, che già sappiamo non essere una soluzione ottima; tale vertice è una soluzione primale di base non degenere in quanto $B = I = \{2, 3\}$. Poiché \bar{x} non è una soluzione ottima per il problema, dovrà necessariamente esistere una direzione ξ che sia di crescita, cioè tale per cui $c\xi > 0$, e che sia ammissibile, cioè tale che valga $A_B\xi \leq 0$.

Cerchiamo allora una soluzione del sistema (P_B) considerando la coppia di sistemi studiata dal Lemma di Farkas, vale a dire:

$$\begin{array}{rcl} & & \xi_2 \leq 0 \\ 2\xi_1 & + & \xi_2 \leq 0 \\ 500\xi_1 & + & 200\xi_2 > 0 \end{array} \quad (3.14)$$

ed il sistema duale (D_B) :

$$\begin{aligned} 2y_2 &= 500 \\ y_1 + y_2 &= 200 \\ y_1, y_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Per verificare quale tra i due sistemi ammetta soluzione, seguiamo questo procedimento: calcoliamo la sola soluzione candidata a risolvere il sistema duale, $\bar{y}_B = cA_B^{-1} = (-50, 250)$. Osserviamo che $(\bar{y}_B, 0)$ è l'unica soluzione di base duale associata a \bar{x} . Essendo $\bar{y}_2 < 0$, tale soluzione non è ammissibile. Sappiamo pertanto che esiste una soluzione per il sistema (3.14), vale a dire una direzione ammissibile di crescita per \bar{x} . Consideriamo

$$\bar{\xi} = -A_B^{-1}u_{B(1)} = -A_B^{-1}u_1 = (0.5, -1),$$

dove con $B(j)$ indichiamo la posizione dell'indice j in B , mentre con u_j indichiamo il vettore che ha tutte le componenti nulle tranne la j -esima, che vale 1 (si tratta cioè del j -esimo vettore unitario), $j = 1, \dots, n$.

Tale direzione è ammissibile essendo soluzione del sistema:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_2 &\leq 0 \\ 2\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2 &\leq 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

$\bar{\xi}$ è inoltre una direzione di crescita essendo

$$c\bar{\xi} = 500 \cdot 0.5 - 200 = 50 > 0.$$

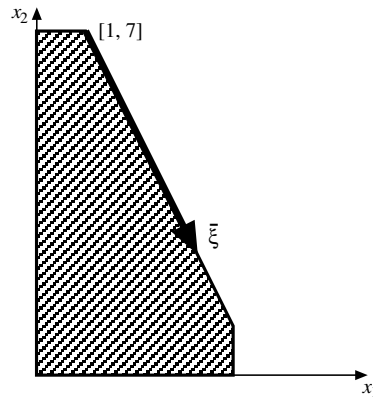


Figura 3.15: Direzione di spostamento

Come evidenziato in figura 3.15, $\bar{\xi}$ individua la direzione di spostamento che va dal vertice $(1, 7)$ verso il vertice ad esso adiacente $(4, 1)$. Lungo tale direzione ci si sposta rimanendo sulla faccia individuata dal vincolo $2x_1 + x_2 \leq 9$, mentre ci si allontana dalla faccia individuata dal vincolo $x_2 \leq 7$. Possiamo allora migliorare il valore della funzione obiettivo spostandoci lungo $\bar{\xi}$ il più possibile, purché si rimanga all'interno della regione

ammissibile: un tale spostamento ci porta al vertice $(4, 1)$, che è il punto ottimo, come già mostrato a pagina 135. Per verificare tale ottimalità iteriamo il ragionamento, e scriviamo il sistema che caratterizza l'insieme delle direzioni ammissibili di crescita della funzione obiettivo rispetto a $(4, 1)$, considerando il nuovo insieme degli indici dei vincoli attivi, coincidente con la base $B' = \{1, 3\}$:

$$\begin{array}{rcl} \xi_1 & & \leq 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 & & \leq 0 \\ 500\xi_1 + 200\xi_2 & & > 0. \end{array}$$

Tale sistema ha soluzione se e solo se *non* ne ammette il sistema duale

$$\begin{array}{rcl} y_1 + 2y_3 & = & 500 \\ & y_3 & = 200 \\ y_1, & y_3 & \geq 0. \end{array}$$

Poiché tale sistema ammette la soluzione non negativa $(100, 200)$, per il Teorema forte della dualità si può concludere che $(4, 1)$ è una soluzione ottima del problema.

Formalizziamo ora le idee dell'esempio precedente, specificando, in particolare, le modalità di individuazione di una direzione ammissibile di crescita, se essa esiste. Consideriamo la coppia asimmetrica di problemi duali:

$$(P) : \max\{cx : Ax \leq b\} \qquad (D) : \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}.$$

Siano B una base ammissibile per (P) e $\bar{x} = A_B^{-1}b_B$ la corrispondente soluzione di base (ovvero un vertice di (P)). Consideriamo i sistemi ristretti di base

$$(P_B) : \begin{cases} A_B \xi \leq 0 \\ c\xi > 0 \end{cases} \qquad (D_B) : \begin{cases} y_B A_B = c \\ y_B \geq 0 \end{cases}$$

Il Lemma di Farkas assicura che esattamente uno tra essi ha soluzione. Come già osservato, il sistema $y_B A_B = c$ ammette come unica soluzione

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1}.$$

Se $\bar{y}_B \geq 0$, allora \bar{y}_B risolve il sistema (D_B) e quindi anche il Duale Ristretto (D_R) ammette soluzione. Di conseguenza non esistono direzioni ammissibili di crescita per \bar{x} , e \bar{x} e $\bar{y} = (\bar{y}_B, 0)$ sono soluzioni di base ottime rispettivamente per (P) e per (D) . Se invece esiste un indice $h \in B$ per cui $\bar{y}_h = cA_B^{-1}u_{B(h)} < 0$, allora il vettore

$$\bar{\xi} = -A_B^{-1}u_{B(h)},$$

che rappresenta la $B(h)$ -ma colonna di A_B^{-1} cambiata di segno, individua una direzione di crescita per \bar{x} . Infatti, $c\bar{\xi} = -cA_B^{-1}u_{B(h)} = -\bar{y}_h > 0$.

Inoltre, risulta $A_B \bar{\xi} = -u_{B(h)} \leq 0$; in particolare, si ha $A_i \bar{\xi} = 0$, per ogni i in $B \setminus \{h\}$, mentre $A_h \bar{\xi} = -1$.

Nel caso in cui \bar{x} sia una soluzione di base non degenera, risulta $I = B$ e quindi $A_I \bar{\xi} \leq 0$: $\bar{\xi}$ è una direzione ammissibile per \bar{x} .

Nel caso in cui \bar{x} sia una soluzione di base degenera, non abbiamo alcuna garanzia che $\bar{\xi}$ sia una direzione ammissibile per \bar{x} . Infatti, $\bar{\xi}$ risolve il sistema ristretto di base (P_B) , che non coincide con il Primale Ristretto (P_R) : $\bar{\xi}$ appartiene quindi al cono $C_B := \{ \xi \in \mathbb{R}^n : A_B \xi \leq 0 \}$ ma non necessariamente al cono delle direzioni ammissibili $C(\bar{x})$, in quanto potrebbe esistere un indice $i \in I \setminus B$ tale che $A_i \bar{\xi} > 0$. Si osservi che $C(\bar{x})$ è un sottoinsieme di C_B e coincide con l'intersezione di tutti i coni C_B al variare di $B \subseteq I$.

Esempio 3.20:

Si consideri il seguente coppia di problemi duali

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(P) max} & x_1 & + \quad x_2 \\
 & & - \quad x_2 \leq 1 \\
 & -x_1 & - \quad x_2 \leq 1 \\
 & x_1 & \leq 0 \\
 & x_1 & + \quad x_2 \leq 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 \text{(D) min} & y_1 & + \quad y_2 & - \quad y_4 \\
 & & - \quad y_2 & - \quad y_3 & - \quad y_4 = 0 \\
 & -y_1 & - \quad y_2 & & + \quad y_4 = 1 \\
 & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \geq 0
 \end{array}$$

e la base $B = \{1, 2\}$. Le corrispondenti matrice e soluzione primale di base sono

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

È immediato verificare che la soluzione \bar{x} è ammissibile. Inoltre, l'insieme degli indici dei vincoli attivi è $I = \{1, 2, 3\}$ e quindi \bar{x} è degenera. Studiamo la coppia di sistemi ristretti di base relativi a B:

$$(P_B) \begin{cases} - \quad \xi_2 \leq 0 \\ -\xi_1 - \quad \xi_2 \leq 0 \\ \xi_1 + \quad \xi_2 > 0 \end{cases}
 \quad
 (D_B) \begin{cases} -y_2 = 1 \\ -y_1 - y_2 = 1 \\ y_1, y_2, \geq 0 \end{cases}$$

Risolviendo il sistema $y_B A_B = c$, otteniamo la soluzione

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = [0 \quad -1].$$

Poiché $\bar{y}_2 < 0$, selezionando $h = 2$, la direzione

$$\bar{\xi} = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

risolve il sistema (P_B) . Poiché

$$A_3 \bar{\xi} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 > 0,$$

questa direzione non è ammissibile per \bar{x} .

Se non ci ha permesso di certificare l'ottimalità di \bar{x} , lo studio dei sistemi ristretti di base ci ha fornito una direzione di crescita $\bar{\xi}$. Allo scopo di verificare se tale direzione sia o meno ammissibile, si può calcolare il massimo

passo di spostamento che possiamo effettuare lungo $\bar{\xi}$ mantenendo l'ammissibilità. Verifichiamo perciò per quali valori non negativi di λ la soluzione $x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\bar{\xi}$ risulta essere ammissibile.

Se $i \in B$, risulta

$$A_i x(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i \bar{\xi} \leq A_i \bar{x} \leq b_i$$

per ogni $\lambda \geq 0$, in quanto $A_i \bar{\xi} \leq 0$.

Analogamente, se $i \in N$ è tale che $A_i \bar{\xi} \leq 0$, la soluzione $x(\lambda)$ soddisfa il vincolo i -esimo per ogni valore non negativo di λ . Se invece $A_i \bar{\xi} > 0$, abbiamo

$$A_i x(\lambda) = A_i \bar{x} + \lambda A_i \bar{\xi} \leq b_i \iff \lambda \leq (b_i - A_i \bar{x}) / A_i \bar{\xi}.$$

Pertanto, il massimo passo che può essere effettuato lungo $\bar{\xi}$ a partire da \bar{x} senza violare il vincolo i -esimo risulta essere

$$\bar{\lambda}_i = \begin{cases} \frac{b_i - A_i \bar{x}}{A_i \bar{\xi}}, & \text{se } A_i \bar{\xi} > 0, \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Scegliendo il più piccolo di questi valori, ovvero

$$\bar{\lambda} = \min\{\bar{\lambda}_i : i \in N\}, \quad (3.18)$$

si ottiene il massimo passo di spostamento consentito. In particolare, se $A_N \bar{\xi} \leq 0$, abbiamo $\bar{\lambda} = +\infty$ e $x(\lambda)$ è ammissibile per ogni valore positivo di λ . Poiché $\bar{\xi}$ è una direzione di crescita, il valore della funzione obiettivo cresce indefinitamente al crescere di λ : siamo nel caso in cui il problema primale (P) è illimitato ed il problema duale (D) è vuoto.

Se invece esiste un indice $i \in N$ tale che $A_i \bar{\xi} > 0$, abbiamo $\bar{\lambda} < +\infty$: $x(\lambda)$ è ammissibile per ogni $\lambda \in [0, \bar{\lambda}]$ e non ammissibile per $\lambda > \bar{\lambda}$.

Nel caso in cui \bar{x} sia una soluzione di base non degenera, abbiamo $\bar{\lambda}_i > 0$ per ogni $i \in N$ e quindi $\bar{\lambda} > 0$: come già verificato in precedenza, la direzione $\bar{\xi}$ è ammissibile. Possiamo quindi effettuare il massimo spostamento consentito $\bar{\lambda}$, spostandoci sul vertice $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ individuato dalla base $B \cup \{k\} \setminus \{h\}$, dove k è un indice tale che $\bar{\lambda}_k = \bar{\lambda}$, ovvero uno degli indici dei vincoli divenuti attivi in seguito allo spostamento.

Nel caso in cui \bar{x} sia una soluzione di base degenera, possiamo avere sia $\bar{\lambda} > 0$ che $\bar{\lambda} = 0$. Nel primo caso possiamo effettuare lo spostamento analogamente al caso non degenera. Se invece il massimo spostamento consentito è nullo, la direzione $\bar{\xi}$ individuata non è ammissibile in quanto esiste un indice $k \in I \setminus B$ tale che $A_k \bar{\xi} > 0$ e quindi $\bar{\xi}$ non appartiene al cono $C(\bar{x})$. Poiché $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_k = 0$, $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ coincide con \bar{x} ma abbiamo comunque individuato una nuova base, $B \cup \{k\} \setminus \{h\}$, associata ad \bar{x} . Possiamo quindi effettuare un *cambiamento di base degenera*.

Più precisamente, vale il seguente risultato che riassume tutti i casi:

Lemma 3.2 *Sia $k \in N$ tale che $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_k$. Allora, $B' = B \cup \{k\} \setminus \{h\}$ è una base ed inoltre $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ è la corrispondente soluzione primale di base.*

Dimostrazione Essendo $A_i\bar{\xi} = 0, \forall i \in B \setminus \{h\}$, si ha che $\bar{\xi}$ è ortogonale al sottospazio generato da $A_{B \setminus \{h\}}$. Inoltre, essendo $A_k\bar{\xi} > 0$, il vettore A_k non può appartenere a tale sottospazio e, quindi, non può essere espresso come combinazione lineare dei vettori $A_i, i \in B \setminus \{h\}$. Da questo e dal fatto che, per ipotesi, le righe di $A_{B \setminus \{h\}}$ sono linearmente indipendenti, segue che B' è una base.

Per dimostrare che $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$ sia la soluzione di base associata a B' , basta verificare che tutti i vincoli in B' siano attivi per $\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}$. Poiché $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_k = (b_k - A_k\bar{x})/A_k\bar{\xi}$, risulta

$$A_kx(\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = A_k(\bar{x} + \bar{\lambda}_k\bar{\xi}) = A_k\bar{x} + \bar{\lambda}_kA_k\bar{\xi} = A_k\bar{x} + b_k - A_k\bar{x} = b_k.$$

Sia $i \in B \setminus \{h\}$, allora risulta

$$A_ix(\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = A_i\bar{x} + \bar{\lambda}A_i\bar{\xi} = A_i\bar{x} = b_i$$

in quanto $A_i\bar{\xi} = 0$ e $i \in I(\bar{x})$. ◇

Un cambiamento di base non degenero, ovvero tale che $\bar{\lambda} > 0$, consente di spostarsi da un vertice della regione ammissibile ad un altro; i due vertici sono collegati da uno spigolo e vengono detti *adiacenti*. Inoltre, il nuovo vertice migliora il valore della funzione obiettivo rispetto al vertice precedente in quanto $c(\bar{x} + \bar{\lambda}\bar{\xi}) = c\bar{x} + \bar{\lambda}c\bar{\xi} > c\bar{x}$.

Un cambiamento di base degenero, ovvero tale che $\bar{\lambda} = 0$, non consente di cambiare vertice ma fornisce una nuova base relativa allo stesso vertice e quindi anche una nuova coppia di sistemi ristretti di base da studiare. Utilizzando una regola che impedisca di individuare basi già analizzate precedentemente, nelle successive iterazioni degeneri, nel caso pessimo, si analizzano tutte le basi relative al vertice: il Teorema 3.14 e le sue conseguenze garantiscono la certificazione dell'ottimalità del vertice oppure l'individuazione di una direzione di crescita ammissibile.

Esempio 3.21: Cambiamenti di base

Si consideri il seguente coppia di problemi duali

$$\begin{array}{llll} \text{(P) max} & & x_2 & \text{(D) min} & y_1 & +y_2 & & -y_4 & +2y_5 \\ & & - & & & & & -y_2 & -y_3 & -y_4 & + y_5 & = & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 & & -y_1 & -y_2 & & +y_4 & = & 1 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 & & y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5 & \geq & 0 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -1 & & & & & & & & & \\ & x_1 & & & \leq & 2 & & & & & & & & & \end{array}$$

e la base $B_1 = \{1, 2\}$. Le corrispondenti matrice e soluzione primale di base sono

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_{B_1}^{-1}b_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione \bar{x} è ammissibile in quanto

$$A_{N_1}\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \leq b_{N_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

L'insieme degli indici dei vincoli attivi è $I = \{1, 2, 3, 4\}$ e quindi \bar{x} è degenere. Per verificare l'ottimalità di \bar{x} o per individuare una sua direzione ammissibile di crescita, studiamo la coppia di sistemi ristretti di base

$$(P_{B_1}) \begin{cases} -\xi_1 & -\xi_2 & \leq 0 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & \leq 0 \\ \xi_2 & & > 0 \end{cases} \quad (D_{B_1}) \begin{cases} -y_1 & -y_2 & = 0 \\ -y_1 & -y_2 & = 1 \\ y_1, & y_2 & \geq 0. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema $y_{B_1} A_{B_1} = c$, otteniamo la soluzione

$$y_{B_1}^1 = c A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $y_1^1 < 0$, selezionando $h_1 = 1$, $B_1(h_1) = 1$, e la direzione

$$\xi^1 = -A_{B_1}^{-1} u_{B_1(h_1)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

è di crescita per c . Poiché

$$A_3 \xi^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 > 0, \quad A_4 \xi^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 > 0,$$

questa direzione non è ammissibile per \bar{x} . Effettuiamo un cambiamento di base degenere, scegliendo $k_1 = 3$. Per la nuova base $B_2 = B_1 \setminus \{h_1\} \cup \{k_1\} = \{3, 2\}$ risulta

$$A_{B_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad y_{B_2}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui la scelta $h_2 = 4$, $B_2(h_2) = 2$, consente di individuare la direzione di crescita

$$\xi^2 = -A_{B_2}^{-1} u_{B_2(h_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che non è ammissibile per \bar{x} in quanto

$$A_4 \xi^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 > 0.$$

Sostituendo $k_2 = 4$ a h_2 , otteniamo la base $B_3 = \{3, 4\}$, per cui abbiamo

$$A_{B_3} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{B_3}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad y_{B_3}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La scelta $h_3 = 3$, $B_3(h_3) = 1$, consente di individuare la direzione di crescita

$$\xi^3 = -A_{B_3}^{-1} u_{B_3(h_3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che è ammissibile per \bar{x} in quanto $A_I \xi^3 \leq 0$, infatti:

$$A_1 \xi^3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 < 0, \quad A_2 \xi^3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 < 0.$$

Pertanto, ξ^3 risolve (P_R) e quindi \bar{x} non è una soluzione ottima di (P) . Il massimo spostamento consentito lungo questo direzione,

$$\bar{\lambda} = \min\{\bar{\lambda}_i : i \in \bar{I}\} = \bar{\lambda}_5 = \frac{b_5 - A_5 \bar{x}}{A_5 \xi_3} = \frac{2 - 0}{1} = 2,$$

permette di individuare $k_3 = 5$, la nuova base $B_4 = \{5, 4\}$ e la corrispondente soluzione di base

$$x^4 = A_{B_4}^{-1} b_{B_4} = x(\bar{\lambda}) = \bar{x} + \bar{\lambda} \xi^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

per cui la funzione obiettivo vale $cx^4 = 1 > -1 = c\bar{x}$.

La Figura 3.16 illustra tutte le operazioni svolte.

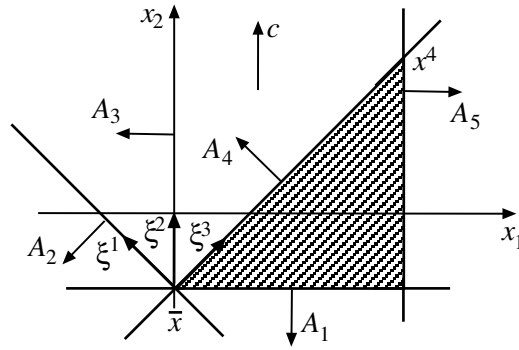


Figura 3.16: Cambiamenti di base degeneri

Possiamo ora fornire una descrizione formale di un algoritmo per la soluzione dei problemi di *PL*, che verrà chiamato *Simplexso Primale*.

```

Procedure Simplexso_Primale( $A, b, c, B, \bar{x}, \bar{y}, stato$ ) :
  begin
    stato := "";
    repeat
       $\bar{x} := A_B^{-1}b_B$ ;  $\bar{y}_B := cA_B^{-1}$ ;  $\bar{y}_N := 0$ ;
      if  $\bar{y}_B \geq 0$  then stato := "Ottimo";
      else begin
         $h := \min \{ i \in B : \bar{y}_i < 0 \}$ ;  $\xi := -A_B^{-1}u_{B(h)}$ ;
        if  $A_N\xi \leq 0$  then stato := "P.illimitato"
        else begin
           $k := \operatorname{argmin} \left\{ \frac{b_i - A_i\bar{x}}{A_i\xi} : A_i\xi > 0, i \in N \right\}$ ;
           $B := B \cup \{k\} \setminus \{h\}$ ;
        end
      end
    until stato  $\neq$  ""
  end.

```

Procedura 3.1: Simplexso Primale

L'algoritmo riceve in input una base primale ammissibile B , ed esegue le seguenti operazioni ad ogni iterazione:

1. Verifica l'ottimalità della soluzione primale di base \bar{x} , nel qual caso termina fornendo anche la corrispondente soluzione duale \bar{y} , oppure individua una direzione di crescita ξ .
2. Calcola il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ , che può essere nullo in caso di degenerazione primale: se il passo risulta essere $+\infty$, cioè se la direzione ξ consente una crescita illimitata della

funzione obiettivo, allora l'algoritmo termina avendo provato che (P) è illimitato e quindi (D) è vuoto.

3. Viene aggiornata la base: $B' = B \cup \{k\} \setminus \{h\}$, con h e k selezionati come precedentemente definito; ciò corrisponde o ad un cambiamento di vertice, ed in questo caso il valore della funzione obiettivo cresce, oppure ad un cambiamento di base degenera.

L'algoritmo termina in un numero finito di passi fornendo la soluzione ottima, se esiste, oppure fornendo la risposta che il problema è illimitato. Infatti, quando la direzione di crescita ξ è ammissibile, o si determina che il problema è illimitato (ed in tal caso l'algoritmo termina), oppure viene individuata una nuova soluzione di base avente un valore della funzione obiettivo maggiore di quello corrente. Essendo tale nuova soluzione un vertice, ed essendo il numero di vertici finito, la proprietà di generare una sequenza crescente di valori della funzione obiettivo di (P) garantisce che l'algoritmo esegua un numero finito di iterazioni in corrispondenza di vertici non degeneri.

Quando invece l'algoritmo visita un vertice degenera, allora, come già evidenziato, esso può generare direzioni non ammissibili e non spostarsi dal vertice corrente. L'algoritmo proposto garantisce la terminazione finita anche in presenza di basi primali degeneri utilizzando uno specifico criterio di selezione degli indici entrante ed uscente noto come *regola anticiclo di Bland*: nel caso in cui esistano più indici h candidati ad uscire dalla base corrente B e/o più indici k candidati ad entrare in base, l'algoritmo seleziona sempre l'indice minimo, cioè $h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\}$ e $k = \min\{i \in N : \lambda_i = \bar{\lambda}\}$. Nel seguito dimostreremo che questo criterio garantisce che una base non venga esaminata più di una volta e quindi, essendo il numero di basi finito, garantisce che venga eseguito un numero finito di iterazioni anche in corrispondenza dei vertici degeneri (osserviamo che l'ordine delle righe e delle colonne è arbitrario: basta fissare un qualsiasi ordinamento degli indici e applicare il criterio di Bland rispetto a tale ordinamento).

Si osservi che:

- Per semplicità abbiamo assunto che una base primale ammissibile venga fornita in input, ma in generale la determinazione di una qualsiasi base primale ammissibile è non banale; per questo si può ricorrere ad una fase di inizializzazione che verrà descritta nel seguito.
- Ad ogni passo occorre calcolare l'inversa della matrice A_B con costo computazionale $O(n^3)$. In pratica però è possibile determinare l'inversa di $A_{B'}$ ($B' = B \setminus \{h\} \cup \{k\}$) a partire dalla conoscenza di A_B^{-1} con costo computazionale $O(n^2)$.

- Sperimentalmente si prova che la scelta di h suggerita dalla regola di Bland produce un algoritmo abbastanza inefficiente. Poiché nei problemi reali l'algoritmo, anche in assenza di regole anticiclo, cicla raramente, si preferisce la scelta di direzioni che garantiscano (sperimentalmente) una migliore efficienza della procedura, quali ad esempio $h := \operatorname{argmax} \{-\bar{y}_i : \bar{y}_i < 0, i \in B\}$, che determina la direzione che fornisce il massimo incremento unitario della funzione obiettivo (dato che $cx(\lambda) = c\bar{x} - \lambda\bar{y}_i$). Tecniche alternative al criterio di Bland per evitare cicli sono le cosiddette tecniche di perturbazione, in cui i dati vengono leggermente modificati in modo da rendere tutte le soluzioni di base non degeneri, senza perdere l'ottimalità delle basi ottime nel problema originario.

Esempio 3.22:

Consideriamo la coppia asimmetrica di problemi duali descritta nell'esempio 3.16 e applichiamo l'Algoritmo del Simplex a partire dalla base primale ammissibile $B_1 = \{2, 5\}$ già analizzata in quell'esempio, a cui corrisponde il vertice $\bar{x}^1 = [4 \ 4]^T$. Come già visto la soluzione di base duale è $\bar{y}^1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ -5]$: quindi l'indice uscente è $h = 5$, con $B(h) = 2$.

Calcoliamo ora la direzione di crescita:

$$\bar{\xi}^1 = -A_{B_1}^{-1}u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La ricerca dell'indice uscente è effettuata analizzando i vincoli non in base:

$$A_N \bar{\xi}^1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Essendo positive solo $A_3\bar{\xi}^1$ e $A_4\bar{\xi}^1$, l'insieme J_1 degli indici candidati a entrare in base è $J_1 = \{i \in N_1 : A_i\bar{\xi}^1 > 0\} = \{3, 4\}$; infatti, dalla figura 3.13 si può osservare come, partendo da \bar{x}^1 , e muovendosi nella direzione $\bar{\xi}^1$ lungo l'iperpiano (retta) di supporto del secondo vincolo, si incontrano gli iperpiani (rette) di supporto dei vincoli 3 e 4. Il valore negativo di $A_1\bar{\xi}^1$ indica che ci si sta allontanando dall'iperpiano (retta) di supporto del vincolo 1.

Determiniamo ora il passo dello spostamento lungo $\bar{\xi}^1$, dato da $\bar{\lambda} = \min\{\lambda_i : i \in J_1\}$, dove $\lambda_i = (b_i - A_i\bar{x}^1)/A_i\bar{\xi}^1$:

$$\lambda_3 = (14 - 8)/3 = 2; \quad \lambda_4 = (8 - 4)/2 = 2;$$

essendo $\bar{\lambda} = \lambda_3 = \lambda_4 = 2$, per la regola anticiclo di Bland si ha $k = \min\{3, 4\} = 3$.

La nuova base è perciò $B_2 = B_1 \setminus \{h\} \cup \{k\} = \{2, 5\} \setminus \{5\} \cup \{3\} = \{2, 3\}$.

Effettuiamo la seconda iterazione:

$$A_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad b_{B_2} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix};$$

la nuova soluzione di base primale è

$$\bar{x}^2 = A_{B_2}^{-1}b_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix};$$

mentre quella duale è:

$$\bar{y}_{B^2} = cA_{B^2}^{-1} = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [-3/2 \quad 5/2], \quad \bar{y}_{N^2} = 0,$$

quindi $\bar{y}^2 = [0 \quad -3/2 \quad 5/2 \quad 0 \quad 0]$. Essendoci solo $\bar{y}_2 < 0$, l'indice uscente è $h = 2$. Calcoliamo la direzione di crescita e il passo lungo essa:

$$\bar{\xi}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad A_{N^2} \bar{\xi}^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \{1, 4\}, \quad \lambda_1 = 22, \quad \lambda_4 = 0 = \bar{\lambda}, \quad k = 4.$$

$\lambda_4 = 0$ è una conseguenza del fatto che $A_4 \bar{x}^2 = 14 = b_4$, cioè che la soluzione di base è primale degenera, come avevamo già mostrato nell'esempio 3.17. Pertanto, $\bar{\lambda} = 0$ indica che la direzione di crescita $\bar{\xi}^2$ non è una direzione ammissibile. La nuova base è $B_3 = B_2 \setminus \{2\} \cup \{4\} = \{3, 4\}$ e la corrispondente soluzione di base primale è

$$A_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{B_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b_{B_3} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo effettuato un cambio di base degenera, in quanto la soluzione primale individuata coincide con la precedente; la nuova soluzione di base duale, come visto nell'esempio 3.17, è diversa dalla precedente, infatti:

$$\bar{y}_{B_3} = [1 \quad 3] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [-2 \quad 3], \quad \bar{y}_{N_3} = 0, \quad \bar{y}^3 = [0 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad 0].$$

L'indice uscente è $h = 3$ e

$$\bar{\xi}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad A_{N^3} \bar{\xi}^3 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix};$$

si ha pertanto $J_3 = \{1\}$ e $\bar{\lambda} = \lambda_1 = 11/3$; l'indice entrante è $k = 1$ e la nuova base è $B_4 = B_3 \setminus \{3\} \cup \{1\} = \{1, 4\}$. Calcoliamo le soluzioni di base primale e duale:

$$A_{B_4} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{B_4}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \quad b_{B_4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^4 = \begin{bmatrix} 13/3 \\ 29/3 \end{bmatrix};$$

$$\bar{y}_{B_4} = [2/3 \quad 7/3], \quad \bar{y}_{N_4} = 0, \quad \bar{y}^4 = [2/3 \quad 0 \quad 0 \quad 7/3 \quad 0].$$

La soluzione duale è ammissibile. Quindi l'algoritmo termina, \bar{x}^4, \bar{y}^4 costituiscono la coppia di soluzioni ottime associate alla base ottima $B = \{1, 4\}$. La sequenza di soluzioni primali e di direzioni di crescita è mostrata in figura 3.17.

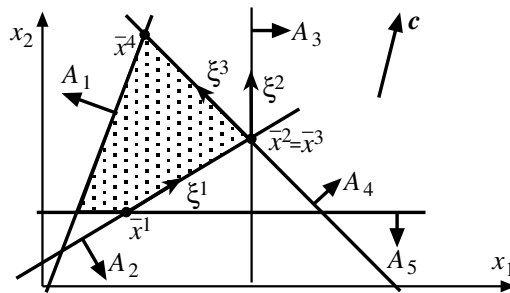


Figura 3.17:

Esempio 3.23: Interpretazione geometrica del Simpleso Primale

Consideriamo l'esempio di figura 3.18(a) e la base primale ammissibile $B = \{1, 2\}$. La soluzione duale corrispondente non è ammissibile poiché risulta $y_1 < 0$: esce quindi dalla base il vincolo $h = 1$. Entra poi in base il vincolo 3: infatti, le scelte possibili per k sono 3 e 4 (poiché $A_5 \xi^1 = 0$), ma k è scelto in modo da determinare una base adiacente ammissibile e $k = 4$ non determina una base primale ammissibile. La nuova base è $B = \{3, 2\}$: la soluzione duale corrispondente non è ammissibile poiché risulta $y_2 < 0$ (si veda la figura 3.18(b)). Esce quindi dalla base il vincolo 2, ci si muove lungo la direzione ξ^2 ortogonale ad A_3 , ed entra in base il vincolo 4 (le alternative per k essendo 4 e 5); la nuova base $\{3, 4\}$ è ottima in quanto primale e duale ammissibile.

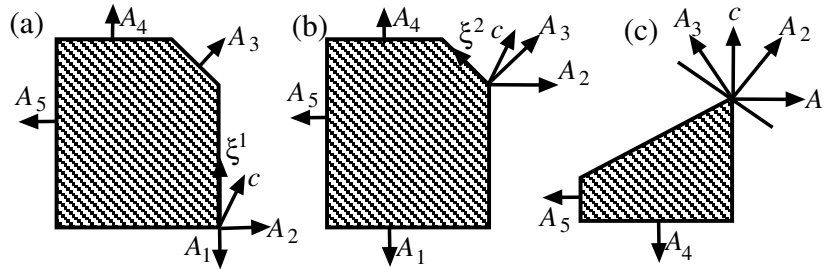


Figura 3.18: Interpretazione geometrica del Simpleso Primale

Il caso di una soluzione degenera è illustrato in figura 3.18(c), ove si consideri la base $B = \{1, 2\}$: tale base non è duale ammissibile ($y_1 < 0$), esce quindi di base il vincolo 1 ed entra in base il vincolo 3 (in questo caso, $\bar{\lambda} = 0$). La nuova base $\{3, 2\}$ è ottima: in questo caso l'iterazione dell'algoritmo modifica la matrice di base senza modificare la soluzione di base *primale* (il vertice non cambia).

L'algoritmo *Simpleso Primale* non può mai determinare che il problema (P) sia vuoto, in quanto abbiamo supposto di avere in input una soluzione di base ammissibile. In generale, mentre determinare una base è semplice, non è altrettanto semplice determinare una base che sia anche ammissibile. Se pertanto non si dispone di una base ammissibile di partenza, si ricorre ad un *problema ausiliario*, presentato nel paragrafo successivo.

Esercizio 3.11 Determinare la complessità delle singole istruzioni dell'algoritmo del Simpleso Primale.

Esercizio 3.12 Determinare l'occupazione di memoria dell'algoritmo del Simpleso Primale.

Individuazione di una base primale ammissibile.

Siano date una base B e la corrispondente soluzione di base $\bar{x} = A_B^{-1}b_B$. Siano poi $H = \{i \in N : A_i \bar{x} \leq b_i\}$ e $J = \{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\}$. Chiaramente se $J = \emptyset$, allora \bar{x} è una soluzione ammissibile di base per (P). Altrimenti costruiamo il *problema ausiliario*

$$(PA) : \max \quad -u\nu$$

$$\begin{array}{rcl} A_B x & & \leq b_B \\ A_H x & & \leq b_H \\ A_J x & -\nu & \leq b_J \\ & -\nu & \leq 0 \end{array}$$

dove u è il vettore che ha tutte le componenti uguali ad 1.

Tale problema ha chiaramente $x = \bar{x}, \bar{\nu} = A_J \bar{x} - b_J$ come soluzione ammissibile di base; infatti nel problema ausiliario le colonne sono $n + |J|$ e il vettore $(\bar{x}, \bar{\nu})$ è soluzione del sistema di $n + |J|$ equazioni in $n + |J|$ incognite:

$$\begin{bmatrix} A_B & 0 \\ A_J & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_B \\ b_J \end{bmatrix},$$

dove la *matrice di base ampliata*:

$$\begin{bmatrix} A_B & 0 \\ A_J & -I \end{bmatrix},$$

è non singolare in quanto A_B è non singolare.

Quindi *Simplexso Primale* può essere utilizzato per determinare una soluzione ottima di base (x^*, ν^*) del problema ausiliario (si osservi che (PA) non può essere illimitato, poiché $-u\nu \leq 0$ per ogni $\nu \geq 0$). Si hanno due casi possibili:

- $\nu^* \neq 0$: in questo caso (P) è vuoto, infatti ad una qualsiasi soluzione ammissibile x di (P) corrisponderebbe la soluzione $(x, 0)$ di (PA) con valore nullo della funzione obiettivo, e di conseguenza migliore di (x^*, ν^*) che ha un valore negativo della funzione obiettivo;
- $\nu^* = 0$: in questo caso x^* è una soluzione di base ammissibile per (P) .

Esempio 3.24:

Si consideri il seguente problema di P.L.

$$(P) \max \quad \begin{array}{rcl} x_1 & +3x_2 & \\ x_1 & +2x_2 & \leq 5 \\ x_1 & -x_2 & \leq 2 \\ x_1 & +3x_2 & \leq 7 \\ & -x_2 & \leq 0 \end{array}$$

e la base $B = \{1, 4\}$, che non è primale ammissibile; infatti

$$A_B = A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = b_N.$$

A partire da B possiamo trovare, se esiste, una base primale ammissibile risolvendo il problema primale ausiliario (PA) ed il suo duale (DA) per $J = \{2\}$ e $H = \{3\}$, cioè la coppia di problemi

$$\begin{array}{rcll}
 \text{(PA) max} & & -\nu & \\
 x_1 & +2x_2 & & \leq 5 \\
 x_1 & -x_2 & -\nu & \leq 2 \\
 x_1 & +3x_2 & & \leq 7 \\
 & -x_2 & & \leq 0 \\
 & & -\nu & \leq 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcll}
 \text{(DA) min} & 5y_1 & +2y_2 & +7y_3 \\
 & y_1 & +y_2 & +y_3 = 0 \\
 & 2y_1 & -y_2 & +3y_3 -y_4 = 0 \\
 & & y_2 & +y_5 = 1 \\
 & y_i & \geq 0, & i = 1, \dots, 5
 \end{array}$$

La base $\mathcal{B}_1 = B \cup J = \{1, 2, 4\}$ è primale ammissibile per costruzione, possiamo quindi applicare l'Algoritmo del Simpleso Primale a partire da essa.

it.1) $\mathcal{B}_1 = \{1, 2, 4\}, \mathcal{N}_1 = \{3, 5\}$;

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{\mathcal{B}_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ \nu^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{N}_1} \begin{bmatrix} x^1 \\ \nu^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = b_{\mathcal{N}_1}.$$

$$y_{\mathcal{B}_1} = [0 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = [-1 \ 1 \ -3], \quad y_{\mathcal{N}_1} = 0;$$

la soluzione duale è $y^1 = [-1 \ 1 \ 0 \ -3 \ 0]$; pertanto $h = 1, \mathcal{B}_1(h) = 1$; per individuare l'indice entrante:

$$\bar{\xi}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{\mathcal{N}_1} \bar{\xi}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_5 = 3, \quad k = 5.$$

it.2) $\mathcal{B}_2 = \{5, 2, 4\}, \mathcal{N}_2 = \{1, 3\}$;

$$\mathcal{A}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}_{\mathcal{B}_2}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{N}_2} \begin{bmatrix} x^2 \\ \nu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = b_{\mathcal{N}_2};$$

$$y_{\mathcal{B}_2} = [0 \ 0 \ -1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0], \quad y_{\mathcal{N}_2} = 0.$$

Poiché $y^2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ è ammissibile per (DA), l'algoritmo termina con le soluzioni ottime (x^2, ν^2) e y^2 . Si osservi che $\nu^2 = 0$, e quindi $\bar{x} = x^2$ è una soluzione di base primale ammissibile per (P), avente $B_1 = \mathcal{B}_2 \setminus \{5\} = \{2, 4\}$ come base; infatti:

$$\mathcal{A}_{B_1} = \mathcal{A}_{\mathcal{B}_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \mathcal{A}_{B_1}^{-1} b_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da cui

$$A_{N_1}\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = b_{N_1}.$$

Esercizio 3.13 Risolvere il problema (P) dell'esempio precedente utilizzando l'Algoritmo del Simpleso Primale a partire dalla base $B_1 = \{2, 4\}$.

La regola anticiclo di Bland.

Per poter assicurare la terminazione dell'algoritmo *Simpleso-Primale*, abbiamo asserito che la regola anticiclo di Bland garantisce che una base non possa venir esaminata più di una volta. Riportiamo per completezza la dimostrazione di questa proprietà.

Teorema 3.16 *L'algoritmo Simpleso-Primale, implementato utilizzando la regola anticiclo di Bland, non esamina la stessa base più di una volta.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che una base B venga visitata due o più volte. Chiamando $B(i)$, $h(i)$ e $k(i)$ rispettivamente la base, l'indice entrante e l'indice uscente all' i -esima iterazione dell'algoritmo, questa ipotesi afferma che esistono due iterazioni v ed ℓ , con $v < \ell$, per cui $B(v) = B(\ell) = B$ e $B(i) \neq B$ per ogni i tale che $v < i < \ell$. Poiché ogni volta che l'algoritmo visita un nuovo vertice il valore della funzione obiettivo cresce, tutte le basi visitate nelle iterazioni del ciclo corrispondono allo stesso vertice \bar{x} e quindi tutti gli indici che entrano ed escono di base appartengono a I . Definiamo

$$r := \max\{h(i) : v \leq i \leq \ell\} = \max\{k(i) : v \leq i \leq \ell\},$$

ossia r è il massimo degli indici entranti ed uscenti dalla base in tutte le iterazioni comprese tra v ed ℓ , estremi inclusi. Il fatto che il massimo degli indici entranti sia uguale al massimo degli indici uscenti segue immediatamente dal fatto che $B(v) = B(\ell)$: qualsiasi indice che entri in base dopo l'iterazione v deve uscirne prima dell'iterazione ℓ , ed analogamente per gli indici entranti.

Sia adesso p una qualsiasi iterazione $v \leq p \leq \ell$ in cui r è l'indice uscente, ossia $r = h(p)$, e sia q una qualsiasi iterazione $v \leq q \leq \ell$ in cui r è l'indice entrante, ossia $r = k(q)$. Sia adesso $\bar{y} = [\bar{y}_{B(p)}, 0]$ la soluzione duale all'iterazione p , in cui r esce di base, e sia $\xi = -A_{B(q)}^{-1}u_{B(h(q))}$ la direzione all'iterazione q , in cui r entra. Per costruzione vale $c\xi > 0$ e $\bar{y}_{B(p)}A_{B(p)}\xi = c$, e quindi

$$c\xi = \bar{y}_{B(p)}A_{B(p)}\xi = \sum_{i \in B(p)} \bar{y}_i A_i \xi > 0.$$

Da questo possiamo ottenere una contraddizione mostrando che tutti i termini nella sommatoria della relazione precedente sono minori o uguali a zero. Dobbiamo quindi distinguere tre casi $i = r$, $i > r$ ed $i < r$.

$i = r$ Poiché r è l'indice uscente all'iterazione p si ha $\bar{y}_r < 0$; dal fatto che r è l'indice entrante all'iterazione q si ha invece che $A_r \xi > 0$, da cui $\bar{y}_r A_r \xi < 0$.

$i > r$ Per definizione di r , tutti gli indici $i > r$ che stanno in $B(v)$ (se esistono) appartengono a *tutte* le basi in tutte le iterazioni comprese tra v ed ℓ ; quindi, in particolare appartengono sia a $B(p)$ che a $B(q)$. Per definizione, nessuno di questi indici può essere $h(q)$, l'indice uscente all'iterazione q : di conseguenza si ha per ogni indice $i > r$ in $B(p)$ (se ne esistono) che $i \in B(q)$ e $i \neq h(q)$. Per costruzione si ha allora che $A_i \xi = 0$, e quindi $\bar{y}_i A_i \xi = 0$ per ogni $i > r$.

$i < r$ Dalla definizione di r segue immediatamente che

$$r = h(p) = \min\{j \in B(p) : \bar{y}_j < 0\} = k(q) = \min\{j \in I \setminus B(q) : A_j \xi > 0\}.$$

Dalla prima relazione discende quindi che $\bar{y}_i \geq 0$ per ogni $i < r$. Siccome qualsiasi indice i in $B(p)$ è l'indice di un vincolo attivo in \bar{x} , allora si ha certamente $A_i \xi \leq 0$ per $i < r$: infatti, se $i \in B(q)$ si ha $A_i \xi \leq 0$ per costruzione, mentre per $i \notin B(q)$ si ha che r è il minimo indice j per cui $A_j \xi > 0$, e quindi $A_i \xi \leq 0$ per $i < r$. Da tutto questo segue che $\bar{y}_i A_i \xi \leq 0$ per $i < r$.

Abbiamo quindi ottenuto una contraddizione, il che dimostra che l'algoritmo visita ciascuna base al più una volta. \diamond

3.3.2 L'algoritmo del Simpleso Duale

L'algoritmo *Simpleso Primale*, descritto nel precedente paragrafo, genera una sequenza di coppie di soluzioni di base primali ammissibili e duali non ammissibili (tranne al più l'ultima): se la soluzione di base duale risulta ammissibile allora l'algoritmo termina, avendo determinato un vertice ottimo. Risulta naturale pensare ad un algoritmo che generi coppie di soluzioni di base complementari in cui la soluzione duale sia sempre ammissibile, il quale cerchi di raggiungere l'ammissibilità primale. Un algoritmo di questo tipo è l'algoritmo *Simpleso Duale*, presentato nel seguito.

Il Simpleso Duale, che altro non è che il Simpleso Primale applicato al problema duale della coppia asimmetrica, riscritto in forma primale, parte da una base duale ammissibile, cioè da un vertice del poliedro duale, ed opera (analogamente al Simpleso Primale) su tale poliedro sino a determinare, se esiste, una coppia di soluzioni di base ottime. Nella descrizione che verrà data del Simpleso Duale, le operazioni faranno riferimento al poliedro primale.

L'algoritmo del Simpleso Duale riceve in input una base duale ammissibile B e l'inversa della matrice di base A_B^{-1} .

Data una coppia di soluzioni di base \bar{x} e \bar{y} , con \bar{y} soluzione duale ammissibile, cioè $\bar{y} = (\bar{y}_B, 0)$ con $\bar{y}_B \geq 0$, l'algoritmo verifica l'ammissibilità di \bar{x} , controlla cioè se $A_N \bar{x} \leq b_N$. In caso affermativo l'algoritmo termina, avendo individuato una coppia di soluzioni ottime. Altrimenti, cioè se esiste un indice $k \in N$ tale che $A_k \bar{x} > b_k$, l'algoritmo determina una direzione ammissibile di decrescita, d , a partire da \bar{y} . Tale direzione d è definita nel seguente modo:

$$d_i = \begin{cases} -\eta_i, & \text{se } i \in B; \\ 1, & \text{se } i = k; \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove $\eta_B = A_k A_B^{-1}$.

Per verificare che d sia effettivamente una direzione ammissibile di decrescita, consideriamo la soluzione duale parametrica $y(\theta) = \bar{y} + \theta d$, che si ottiene spostandosi da \bar{y} lungo d di un passo $\theta \geq 0$.

La direzione d è di decrescita. Infatti, essendo $A_k \bar{x} > b_k$, si ha che $y(\theta)b = (\bar{y}_B - \theta \eta_B)b_B + \theta b_k = \bar{y}_B b_B + \theta(b_k - A_k A_B^{-1} b_B) = \bar{y}b + \theta(b_k - A_k \bar{x}) < \bar{y}b$ per ogni $\theta > 0$.

Per quanto riguarda l'ammissibilità, è facile verificare che $y(\theta)A = c$ per qualsiasi scelta di θ , in quanto

$$y(\theta)A = (\bar{y}_B - \theta \eta_B)A_B + \theta A_k = \bar{y}_B A_B + \theta(A_k - A_k) = \bar{y}_B A_B = c.$$

Per garantire che d sia ammissibile, va quindi verificato soltanto che sia $y(\theta) = \bar{y} + \theta d \geq 0$ per un opportuno passo di spostamento $\theta > 0$. Osserviamo che gli indici critici sono gli indici in B , dovendo essere $(\bar{y}_B - \theta \eta_B) \geq 0$ (infatti, $\bar{y}_k + \theta \geq 0$ per ogni $\theta \geq 0$). In particolare, se $\eta_B \leq 0$, allora l'ammissibilità di $y(\theta)$ è assicurata per qualsiasi $\theta > 0$. Essendo d una direzione di decrescita, segue che il problema duale è illimitato, e conseguentemente il primale è vuoto. Se invece esiste almeno un indice $i \in B$ per cui $\eta_i > 0$, il massimo passo $\bar{\theta}$ che può essere compiuto lungo d senza perdere l'ammissibilità duale è $\bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B, \eta_i > 0\}$.

In tal caso, l'algoritmo fa uscire dalla base un indice h che determina tale passo $\bar{\theta}$ lungo d , ossia l'indice di una componente di $y(\theta)$ che diverrebbe negativa se fosse effettuato un passo più lungo di $\bar{\theta}$. Analogamente a quanto effettuato dall'algoritmo del Simpleso Primale, viene applicata la regola anticiclo di Bland per garantire la terminazione dell'algoritmo. Nel caso dell'algoritmo del Simpleso Duale, tale regola si traduce nella selezione del minimo indice h che determina il passo di spostamento $\bar{\theta}$ lungo d . In maniera del tutto analoga, la regola anticiclo di Bland suggerisce di selezionare il minimo tra gli indici $k \in N$ tali che $A_k \bar{x} > b_k$.

```

Procedure Simpleso_Duale( $A, b, c, B, \bar{x}, \bar{y}, stato$ ) :
  begin
     $stato := \text{" "}$ ;
    repeat
       $\bar{x} := A_B^{-1} b_B$ ;  $\bar{y}_B := c A_B^{-1}$ ;  $\bar{y}_N := 0$ ;
      if  $A_N \bar{x} \leq b_N$  then  $stato := \text{"Ottimo"}$ ;
      else begin
         $k := \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\}$ ;  $\eta_B := A_k A_B^{-1}$ ;
        if  $\eta_B \leq 0$  then  $stato := \text{"P.vuoto"}$ 
        else begin
           $h := \operatorname{argmin}\{\bar{y}_i/\eta_i : \eta_i > 0, i \in B\}$ ;
           $B := B \cup \{k\} \setminus \{h\}$ ;
        end
      end
    until  $stato \neq \text{" "}$ 
  end.

```

Procedura 3.2: Simpleso Duale

Esempio 3.25:

Si consideri la coppia asimmetrica di problemi duali

$$\begin{array}{rcl}
 \text{(P) max} & x_1 & \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 6 & \\
 & x_1 - 2x_2 \leq 6 & \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 4 & \\
 & 2x_1 - x_2 \leq 4 & \\
 & -x_1 \leq 0 & \\
 \text{(D) min} & 6y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 4y_4 & \\
 & y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 - y_5 = 1 & \\
 & 2y_1 - 2y_2 + y_3 - y_4 = 0 & \\
 & y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 &
 \end{array}$$

e la base $B_1 = \{1, 2\}$. Essendo

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix}, \quad b_{B_1} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

la corrispondente soluzione di base primale è

$$\bar{x}^1 = A_{B_1}^{-1} b_{B_1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che risulta essere non ammissibile; infatti

$$A_{N_1} \bar{x}^1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = b_{N_1}.$$

Viceversa, c può essere espresso come combinazione lineare a coefficienti non negativi di A_1 ed A_2 , e quindi la base B_1 è duale ammissibile; infatti

$$\bar{y}_{B_1} = cA_{B_1}^{-1} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = [1/2 \quad 1/2], \quad \bar{y}_{N_1} = 0,$$

da cui $\bar{y}^1 = [1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$. Possiamo quindi applicare l'Algoritmo del Simpleso Duale a partire dalla base B_1 . L'indice entrante è $k = \min\{i \in N_1 : A_i \bar{x}^1 > b_i\} = \min\{3, 4\} = 3$. Poiché

$$\bar{\eta}_{B_1} = A_3 A_{B_1}^{-1} = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{bmatrix} = [5/4 \quad 3/4],$$

da $\bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i / \bar{\eta}_i : i \in B_1, \bar{\eta}_i > 0\}$ si ha

$$\bar{\theta} = \min\left\{\frac{\bar{y}_1}{\bar{\eta}_1}, \frac{\bar{y}_2}{\bar{\eta}_2}\right\} = \min\left\{\frac{1/2}{5/4}, \frac{1/2}{3/4}\right\} = \min\left\{\frac{2}{5}, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{5};$$

pertanto l'indice uscente è $h = 1$. La nuova base è $B_2 = B_1 \setminus \{h\} \cup \{k\} = \{1, 2\} \setminus \{1\} \cup \{3\} = \{3, 2\}$. Effettuiamo la seconda iterazione dove:

$$A_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}, \quad b_{B_2} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix};$$

la nuova soluzione primale è

$$\bar{x}^2 = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14/5 \\ -8/5 \end{bmatrix},$$

$$\bar{y}_{B_2} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = [2/5 \quad 1/5], \quad \bar{y}_{N_2} = 0;$$

la soluzione duale è $\bar{y}^2 = [0 \quad 1/5 \quad 2/5 \quad 0 \quad 0]$. Si osservi che \bar{x}^2 non è ammissibile in quanto

$$A_{N_2} \bar{x}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14/5 \\ -8/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 36/5 \\ -14/5 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = b_{N_2}.$$

L'indice entrante è $k = 4$ in quanto è l'indice dell'unico vincolo violato, mentre

$$\bar{\eta}_{B_2} = [2 \quad -1] \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = [3/5 \quad 4/5],$$

$$\bar{\theta} = \min\left\{\frac{\bar{y}_3}{\bar{\eta}_3}, \frac{\bar{y}_2}{\bar{\eta}_2}\right\} = \min\left\{\frac{2/5}{3/5}, \frac{1/5}{4/5}\right\} = \min\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right\} = \frac{1}{4},$$

da cui l'indice uscente è $h = 2$. La nuova base è perciò $B_3 = \{3, 2\} \setminus \{2\} \cup \{4\} = \{3, 4\}$. Effettuiamo la terza iterazione;

$$A_{B_3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{B_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad b_{B_3} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix};$$

la soluzione di base primale è

$$\bar{x}^3 = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{y}_{B_3} = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = [1/4 \quad 1/4], \quad \bar{y}_{N_3} = 0,$$

la soluzione duale è $\bar{y}^3 = [0 \quad 0 \quad 1/4 \quad 1/4 \quad 0]$. Si osservi che \bar{x}^3 è ammissibile in quanto

$$A_{N_3} \bar{x}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = b_{N_3}.$$

Quindi l'algoritmo termina; \bar{x}^3, \bar{y}^3 costituiscono la coppia di soluzioni ottime associate alla base ottima $B = \{3, 4\}$.

Esempio 3.26: Interpretazione geometrica del Simpleso Duale

Diamo qui un'interpretazione geometrica delle operazioni effettuate dall'algoritmo del Simpleso Duale; consideriamo l'esempio di figura 3.19, dove accanto a ciascun vincolo è indicata la corrispondente riga di A .

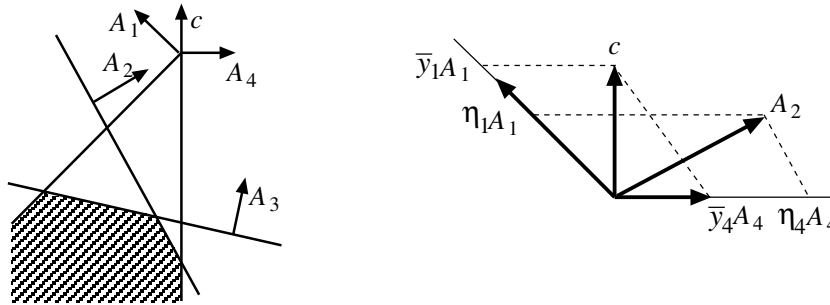


Figura 3.19: Interpretazione geometrica del Simpleso Duale (1)

La base $B = \{1, 4\}$ è chiaramente duale ammissibile, essendo c esprimibile come combinazione lineare non negativa di A_1 e A_4 ; non è però primale ammissibile, essendo violati i vincoli 2 e 3. In accordo alla regola anticiclo, l'algoritmo pone $k = \min\{2, 3\} = 2$. La scelta del vincolo uscente dalla base è effettuata mediante il criterio del minimo rapporto: per la determinazione di h consideriamo la soluzione del sistema

$$\eta_1 A_1 + \eta_4 A_4 = A_2,$$

che corrisponde ad esprimere A_2 come combinazione lineare dei vettori A_1 ed A_4 . Nell'ingrandimento in figura 3.19 sono riportati i vettori $\bar{y}_1 A_1, \eta_1 A_1, \bar{y}_4 A_4$ e $\eta_4 A_4$. I vettori $\eta_1 A_1$ e $\eta_4 A_4$ hanno lo stesso verso, rispettivamente, di A_1 e A_4 ; pertanto si ha che $\eta_1 > 0$ e $\eta_4 > 0$. Dalla valutazione delle norme dei vettori, cioè dal fatto che $\bar{y}_1 A_1$ ha una norma maggiore di $\eta_1 A_1$, si ha che $\bar{y}_1/\eta_1 > 1$; analogamente, si ha che $\bar{y}_4/\eta_4 < 1$: il criterio del minimo rapporto seleziona quindi $h = 4$ come l'indice uscente da B , ottenendo come nuova base l'insieme $\{1, 2\}$.

Si noti che, operando in uno spazio bidimensionale, è possibile verificare le conseguenze che si possono avere eliminando uno o l'altro degli indici in base in seguito all'inserimento dell'indice $k = 2$. Le uniche basi adiacenti che si possono ottenere sono $\{2, 4\}$ e $\{1, 2\}$, corrispondenti rispettivamente all'uscita di 1 ed all'uscita di 4. È immediato verificare che $\{1, 2\}$ è duale ammissibile mentre $\{2, 4\}$ non lo è; siccome il Simpleso Duale individua basi adiacenti duali ammissibili, la nuova base non può essere che $\{1, 2\}$.

Un caso in cui (D) è illimitato, e quindi (P) non è ammissibile, è mostrato in figura 3.20(a), ove $B = \{1, 2\}$ è una base duale ammissibile: è immediato verificare che, in questo caso, $k = 3$, e che il sistema $\eta_B A_B = A_3$ ha soluzioni negative, cioè $\eta_1 < 0$ e $\eta_2 < 0$ (il vettore A_3 forma un angolo maggiore di 90° sia con A_1 che con A_2).

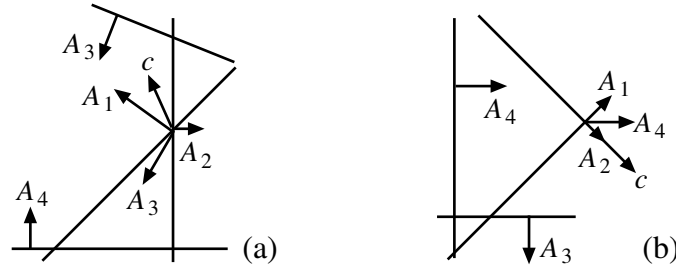


Figura 3.20: Interpretazione geometrica del Simpleso Duale (2)

Data la soluzione di base $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, 0, 0)$ corrispondente a B , si ha che

$$\bar{y}(\theta) = (\bar{y}_1 - \eta_1 \theta, \bar{y}_2 - \eta_2 \theta, \theta, 0)$$

è ammissibile per (D) per ogni $\theta \geq 0$; infatti $\bar{y}(\theta) \geq 0$ dato che $\eta_B \leq 0$, ed inoltre

$$(\bar{y}_1 - \theta \eta_1) A_1 + (\bar{y}_2 - \theta \eta_2) A_2 + \theta A_3 + 0 A_4 = \bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \theta(-\eta_1 A_1 - \eta_2 A_2 + A_3) = c$$

poiché $\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 = c$ e $\eta_B A_B = A_3$. Inoltre

$$\bar{y}(\theta) b = \bar{y}_1 b_1 + \bar{y}_2 b_2 + \theta(-\eta_1 b_1 - \eta_2 b_2 + b_3),$$

e siccome si ha $(\eta_1, \eta_2) = A_3 A_B^{-1}$, risulta

$$-\eta_1 b_1 - \eta_2 b_2 + b_3 = -A_3 A_B^{-1} b_B + b_3 = -A_3 \bar{x} + b_3 < 0.$$

Pertanto la funzione obiettivo decresce al crescere di θ , e quindi (D) è illimitato.

Il caso di una soluzione duale degenera è mostrato in figura 3.20(b), ove la soluzione corrispondente alla base $B = \{1, 2\}$ è degenera essendo $\bar{y}_1 = 0$. È immediato verificare che $k = 4$ e $\eta_B = A_4 A_B^{-1} > 0$; per il criterio del minimo rapporto si ha $h = 1$ e la nuova base (non primale ammissibile) è $\{2, 4\}$, con uguale valore della funzione obiettivo.

Esercizio 3.14 Si risolva geometricamente il problema dell'esempio 3.25 mediante il Simpleso Duale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$; si confrontino i risultati ottenuti con quelli riportati nell'esempio.

Individuazione di una base duale ammissibile.

Per completare lo studio del Simpleso Duale resta da considerare il caso in cui non è nota una soluzione di base duale ammissibile da cui partire. Nel problema duale (D) , possiamo supporre senza perdita di generalità che sia $c \geq 0$: infatti, essendo i vincoli del problema in forma di uguaglianza, è possibile moltiplicare per -1 ogni vincolo per cui sia $c_i < 0$. Introduciamo quindi il seguente problema, che chiameremo duale ausiliario (DA) ,

$$(DA) : \begin{array}{rcl} \min & yb & + \quad wM \\ & yA & + \quad w & = c \\ & y, & & w & \geq 0 \end{array}$$

dove M è un vettore con componenti positive e opportunamente grandi; per (DA) è nota la soluzione di base ammissibile $(\bar{y}, \bar{w}) = (0, c)$, la cui base B è data dagli indici relativi alle variabili w , e la matrice di base è $A_B = I$. Da tale base si può partire con l'algoritmo del Simpleso Duale. Si può dimostrare che, scegliendo le componenti di M sufficientemente grandi, (DA) è equivalente a D . Più precisamente, se (D) è inferiormente illimitato, anche (DA) lo è indipendentemente dal valore scelto per le componenti di M . Se (D) non è inferiormente illimitato, allora esiste un valore per tali componenti tale che, data una qualsiasi soluzione ottima di base (\bar{y}, \bar{w}) per (DA) , se $\bar{w} = 0$ allora \bar{y} è una soluzione ottima per (D) , altrimenti (cioè se $\bar{w} \neq 0$), si ha che (D) non possiede soluzioni ammissibili. È possibile però che (DA) risulti inferiormente non limitato anche nel caso in cui (D) sia vuoto; in tal caso almeno una variabile ausiliaria avrà valore positivo. È possibile inoltre implementare l'algoritmo del Simpleso Duale in modo tale che risolva (DA) per un opportuno valore delle componenti di M , senza che esso venga scelto a priori.

Esempio 3.27:

Si consideri la coppia di problemi duali:

$$(P) : \begin{array}{rcl} \max & 4x_1 & + \quad 2x_2 \\ & -x_1 & + \quad 4x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & - \quad 2x_2 & \leq -3 \\ & -x_1 & + \quad x_2 & \leq -1 \end{array} \quad (D) : \begin{array}{rcl} \min & 2y_1 & - \quad 3y_2 & - \quad y_3 \\ & -y_1 & + \quad y_2 & - \quad y_3 & = 4 \\ & 4y_1 & - \quad 2y_2 & + \quad y_3 & = 2 \\ & y_1, & & y_2, & y_3, & \geq 0 \end{array}$$

Non avendo né una base primale né una base duale ammissibile di partenza, risolviamo il problema Duale Ausiliario (DA) e il suo duale (PA) , ponendo $M = 20$:

$$(DA) : \begin{array}{rcl} \min & 2y_1 & - \quad 3y_2 & - \quad y_3 & + \quad 20w_1 & + \quad 20w_2 \\ & -y_1 & + \quad y_2 & - \quad y_3 & + \quad w_1 & = 4 \\ & 4y_1 & - \quad 2y_2 & + \quad y_3 & & + \quad w_2 & = 2 \\ & y_1, & & y_2, & & y_3, & w_1, & & w_2 & \geq 0 \end{array}$$

$$(PA) : \begin{array}{rcl} \max & 4x_1 & + \quad 2x_2 \\ & -x_1 & + \quad 4x_2 & \leq 2 \\ & x_1 & - \quad 2x_2 & \leq -3 \\ & -x_1 & + \quad x_2 & \leq -1 \\ & x_1 & & \leq 20 \\ & & & x_2 & \leq 20 \end{array}$$

La base di partenza è quella relativa alle variabili ausiliarie w_1 e w_2 : $B = \{4, 5\}$.

it.1) $B_1 = \{4, 5\}$

$$A_{B_1} = A_{B_1}^{-1} = I, \quad x^1 = A_{B_1}^{-1}b_{B_1} = b_{B_1} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad y^1 = [0 \quad 0 \quad 0], \quad w^1 = [4 \quad 2];$$

il valore della funzione obiettivo è $(y^1, w^1)(b, M) = 120$. Controlliamo l'ammissibilità primale:

$$A_{N_1}x^1 = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ -20 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Essendo violati due vincoli, per la regola anticiclo di Bland, l'indice entrante in base è $k = \min\{1, 3\} = 1$; valutiamo ora la direzione di decremento individuata da η_{B_1} :

$$\eta_{B_1} = A_k A_{B_1}^{-1} = A_1 = [-1 \quad 4].$$

Essa ha solo la seconda componente positiva, quindi l'indice uscente è il secondo indice di B_1 : $h = 5$; pertanto la nuova base è $B_2 = B_1 \setminus \{5\} \cup \{1\} = \{4, 1\}$.

it.2) $B_2 = \{4, 1\}$

$$A_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad x^2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 11/2 \end{bmatrix}, \quad (y^2, w^2)_{N_2} = 0,$$

$$(y^2, w^2)_{B_2} = cA_{B_2}^{-1} = [4 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = [9/2 \quad 1/2],$$

$$y^2 = [1/2 \quad 0 \quad 0], \quad w^2 = [9/2 \quad 0];$$

la funzione obiettivo vale $(y^2, w^2)(b, M) = 91$. Non è primale ammissibile in quanto è violato il secondo vincolo:

$$A_{N_2}x^2 = \begin{bmatrix} 9 \\ -29/2 \\ 11/2 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad k = 2, \quad \eta_{B_2} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix};$$

si ha di nuovo una sola componente positiva, pertanto $h = 4$.

it.3) $B_3 = \{2, 1\}$

$$A_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{B_3}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad x^3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \quad (y^3, w^3)_{N_3} = 0,$$

$$(y^3, w^3)_{B_3} = [9 \quad 5], \quad y^3 = [5 \quad 9 \quad 0], \quad w^3 = [0 \quad 0];$$

la funzione obiettivo vale $(y^3, w^3)(b, M) = y^3b = -17$. Controlliamo l'ammissibilità primale:

$$A_{N_3}x^3 = \begin{bmatrix} 7/2 \\ -4 \\ -1/2 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} -1 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad k = 3, \quad \eta_{B_3} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

$\eta_{B_3} \leq 0$, pertanto (DA) è illimitato inferiormente e, di conseguenza, anche (D) è illimitato inferiormente e (P) è vuoto.

Esercizio 3.15 *Si studi il problema (P) dell'esempio precedente, rappresentandolo geometricamente, e si verifichi che esso è vuoto. Inoltre, considerando il problema (PA) , si interpretino geometricamente le iterazioni svolte nell'esempio.*

3.3.3 Analisi post-ottimale

Consideriamo la coppia di problemi

$$(P) : \max\{cx : Ax \leq b\} \quad (D) : \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}.$$

Sia A_B una base ottima, \bar{x} e $\bar{y} = (\bar{y}_B, 0)$ la corrispondente coppia di soluzioni complementari ottime: vogliamo studiare come varia la coppia di soluzioni ottime al variare dei dati del problema.

Si tratta di un problema di notevole interesse pratico, per diversi motivi: innanzitutto, va ricordato che per costruire il modello di PL sono state fatte approssimazioni (spesso notevoli), ad esempio perché sono stati assunti come lineari fenomeni che non lo sono, oppure perché alcuni parametri non sono noti con precisione. È quindi utile conoscere quanto sia “stabile” la soluzione ottima ottenuta risolvendo il problema di PL , cioè quanto essa sia sensibile a piccole variazioni dei dati; in questo caso si parla di *analisi di sensitività*. Altre volte si considerano alcuni dei dati come funzione di uno o più parametri e ci si pone il problema di determinare il valore ottimo della funzione obiettivo come funzione dei parametri stessi; in questo caso si parla di *analisi parametrica*. Infine, un altro caso di notevole interesse pratico è quello in cui, a partire dalla soluzione trovata, si voglia risolvere un nuovo problema che differisca dal precedente solo in alcuni dei dati (ad esempio, un nuovo vincolo, una diversa funzione obiettivo o un diverso vettore di risorse); in questo caso si parla di *riottimizzazione*.

Tratteremo nel seguito, separatamente, il caso in cui le variazioni riguardano i vettori c e b ed i casi in cui viene aggiunto al problema, o da esso eliminato, un vincolo o una variabile.

Variazione del vettore c

Supponiamo innanzitutto che il vettore dei costi c venga sostituito da un nuovo vettore c' : ovviamente, la matrice di base A_B continua ad essere primale ammissibile, e \bar{x} continua ad essere la soluzione primale ad essa corrispondente. La soluzione duale diventa $\bar{y}' = (\bar{y}'_B, \bar{y}'_N) = (c'A_B^{-1}, 0)$: se $\bar{y}'_B \geq 0$, allora A_B rimane ottima, altrimenti si può applicare, a partire da A_B , il Simplexso Primale per determinare una nuova base ottima.

Consideriamo ora il caso in cui il vettore dei costi sia una funzione lineare di un parametro λ , ossia $c(\lambda) = c + \lambda\nu$ con ν un qualsiasi vettore reale, e si voglia determinare quale è l'intervallo in cui può variare λ senza che la base A_B perda l'ottimalità. Per questo, è sufficiente che risulti $y(\lambda)_B = (c + \lambda\nu)A_B^{-1} \geq 0$, cioè

$$(c + \lambda\nu)A_B^{-1}u_{B(i)} \geq 0 \quad i \in B,$$

dove, ricordiamo, $A_B^{-1}u_{B(i)}$ è la colonna dell'inversa della matrice di base relativa alla variabile di base $\bar{y}_i = cA_B^{-1}u_{B(i)}$. Esplicitando queste condizioni,

risulta che, per ogni $i \in B$, deve essere

$$\lambda \geq \frac{-cA_B^{-1}u_{B(i)}}{\nu A_B^{-1}u_{B(i)}} = -\frac{\bar{y}_i}{\nu A_B^{-1}u_{B(i)}} \quad \text{se } \nu A_B^{-1}u_{B(i)} > 0,$$

$$\lambda \leq \frac{-cA_B^{-1}u_{B(i)}}{\nu A_B^{-1}u_{B(i)}} = -\frac{\bar{y}_i}{\nu A_B^{-1}u_{B(i)}} \quad \text{se } \nu A_B^{-1}u_{B(i)} < 0;$$

queste disequazioni definiscono l'intervallo desiderato (si noti che tale intervallo deve contenere lo 0, in quanto abbiamo supposto che B sia duale ammissibile).

Può essere interessante studiare l'andamento del valore ottimo della funzione obiettivo in funzione del parametro λ : indicando con $z(\lambda)$ tale funzione, è facile vedere che si tratta di una funzione convessa lineare a tratti.

Esempio 3.28:

Si consideri il problema dell'esempio 3.25; al termine dell'applicazione del Simpleso Duale si è ottenuta la base ottima $B = \{3, 4\}$, a cui corrispondono le soluzioni ottime $\bar{x} = [2 \ 0]^T$ e $\bar{y} = [0 \ 0 \ 1/4 \ 1/4 \ 0]$.

Si consideri ora il gradiente del costo in forma parametrica: $c(\lambda) = c + \lambda\nu$, con $\nu = [1 \ 1]$. Si vuole conoscere per quali valori di $c(\lambda)$ la base $B = \{3, 4\}$ resta ottima.

Dalle formule su esposte si ha che

$$\nu A_B^{-1} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = [3/4 \ -1/4].$$

Pertanto, essendo:

a) $\nu A_B^{-1}u_{B(1)} = 3/4 > 0$, si ha $\lambda \geq -\frac{\bar{y}_3}{3/4} = -\frac{1/4}{3/4} = -1/3$;

b) $\nu A_B^{-1}u_{B(2)} = -1/4 < 0$, si ha $\lambda \leq \frac{\bar{y}_4}{-(-1/4)} = \frac{1/4}{1/4} = 1$;

da cui si ottiene che $B = \{3, 4\}$ resta ottima per $-1/3 \leq \lambda \leq 1$.

Per studiare la variazione del valore ottimo della funzione obiettivo al variare di λ , si ricorda che $z(\lambda) = y(\lambda)_{Bb_B} = (c + \lambda\nu)\bar{x}$, e quindi:

$$z(\lambda) = [1 + \lambda \ \lambda] \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 + 2\lambda.$$

Pertanto, quando λ varia nell'intervallo $[-1/3, 1]$, il valore ottimo della funzione obiettivo varia linearmente nell'intervallo $[4/3, 4]$.

Esercizio 3.16 *Si mostri geometricamente che, per il problema dell'esempio precedente, il vettore parametrico $c(\lambda)$ descrive il cono finitamente generato da A_3 e A_4 , al variare di λ nell'intervallo $[-1/3, 1]$.*

Esercizio 3.17 *Studiare le soluzioni ottime che si ottengono per $\lambda < -1/3$ e per $\lambda > 1$. Definire inoltre la funzione $z(\lambda)$ per qualsiasi valore di λ .*

Variatione del vettore b

Consideriamo il caso della variazione di una componente del vettore b (l'estensione al caso più generale è immediata), e sia b'_k il nuovo valore assunto da b_k ; la soluzione duale non cambia, mentre per la soluzione primale si devono distinguere due casi:

$k \in N$: se risulta $A_k \bar{x} \leq b'_k$ allora A_B rimane ottima, altrimenti si può applicare il simplesso duale per determinare la nuova base ottima, conoscendo già l'indice k entrante in base;

$k \in B$: si calcola $\bar{x}' = A_B^{-1} b'_B$: se risulta $A_N \bar{x}' \leq b_N$ allora A_B rimane ottima, altrimenti si può applicare il simplesso duale per determinare la nuova base ottima.

Esempio 3.29:

Si consideri la seguente coppia di problemi di P.L.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(P) max} & 3x_1 \quad +x_2 \\
 & -2x_1 \quad +x_2 \leq 1 \\
 & x_1 \quad -2x_2 \leq -4 \\
 & x_1 \quad +x_2 \leq 14 \\
 & x_1 \quad \leq 8 \\
 & \quad \quad -x_2 \leq -4 \\
 \text{(D) min} & y_1 - 4y_2 \quad +14y_3 \quad +8y_4 \quad -4y_5 \\
 & -2y_1 + y_2 \quad +y_3 \quad +y_4 \quad = 3 \\
 & y_1 - 2y_2 \quad +y_3 \quad -y_5 = 1 \\
 & y_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 5
 \end{array}$$

È facile verificare che la base ottima è $B_1 = \{2, 3\}$ e le soluzioni ottime sono $\bar{x}^1 = [8 \ 6]^T$ e $\bar{y}^1 = [0 \ 2/3 \ 7/3 \ 0 \ 0]$.

Sia ora $b'_4 = 7$ il nuovo valore del termine noto del quarto vincolo. Siccome $4 \in N_1$, le soluzioni di base non cambiano. Si deve controllare se, dopo la perturbazione, il quarto vincolo è ancora soddisfatto:

$$A_4 \bar{x}_1 = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} = 8 > 7;$$

pertanto la base B_1 non è primale ammissibile. Si applichi il Simplex Duale partendo da B_1 :

$$A_{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{B_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix};$$

l'indice entrante è ovviamente $k = 4$; si ha quindi

$$\eta_{B_1} = A_k A_{B_1}^{-1} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = [1/3 \ 2/3].$$

Siccome entrambe le componenti di η_{B_1} sono positive, il passo di spostamento e l'indice uscente dalla base si ottengono mediante il criterio del minimo rapporto:

$$\bar{\lambda} = \min\left\{\frac{\bar{y}_2^1}{\eta_2}, \frac{\bar{y}_3^1}{\eta_3}\right\} = \min\left\{\frac{2/3}{1/3}, \frac{7/3}{2/3}\right\} = \min\{2, 7/2\} = 2;$$

quindi $h = 2$. Si ottiene una nuova base $B_2 = \{4, 3\}$. Calcoliamo la matrice inversa di base e le soluzioni di base:

$$\begin{aligned}
 A_{B_2} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{B_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}^2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}, \\
 \bar{y}_{B_2}^2 &= [2 \ 1], \quad \bar{y}_{N_2}^2 = 0, \quad \bar{y}^2 = [0 \ 0 \ 1 \ 2 \ 0].
 \end{aligned}$$

Verifichiamo ora se la base è primale ammissibile:

$$A_{N_2}\bar{x}^2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -7 \\ -7 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = b_{N_2}.$$

Pertanto B_2 è ottima; \bar{x}^2 e \bar{y}^2 sono, rispettivamente, le soluzioni ottime dei problemi (P') e (D') ottenuti a seguito della variazione del vettore dei termini noti b .

Esercizio 3.18 *Si analizzino geometricamente i passi svolti nell'esempio precedente.*

In analogia a quanto fatto per il vettore dei costi, assumiamo che il vettore delle risorse sia una funzione lineare di un parametro λ , cioè del tipo $b(\lambda) = b + \lambda\nu$ con ν un qualsiasi vettore, e si voglia determinare quale è l'intervallo in cui può variare λ senza che la base A_B perda l'ottimalità: per questo, basta notare che la soluzione primale di base corrispondente a B per un dato valore di λ è

$$x(\lambda) = A_B^{-1}(b_B + \lambda\nu_B) = \bar{x} + \lambda A_B^{-1}\nu_B,$$

per cui deve risultare

$$A_N x(\lambda) = A_N \bar{x} + \lambda A_N A_B^{-1} \nu_B \leq b_N + \lambda \nu_N,$$

e, a partire da tali relazioni, è immediato determinare l'intervallo in cui può variare λ .

Esercizio 3.19 *Determinare, per la coppia di problemi dell'esempio 3.29, l'intervallo in cui può variare λ senza che la base A_{B_1} perda l'ottimalità a seguito della variazione parametrica del vettore dei termini noti $b(\lambda) = b + \lambda\nu$, con $\nu = [0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$.*

Aggiunta di un vincolo in (P) (di una variabile in (D))

Sia $A_{m+1}x \leq b_{m+1}$ il vincolo da aggiungere: se $A_{m+1}\bar{x} \leq b_{m+1}$, allora A_B rimane ottima, altrimenti si può applicare il simpleso duale per determinare la nuova base ottima, conoscendo già l'indice $(m+1)$ della variabile che dovrà entrare in base. Questo caso è equivalente a quello in cui si debba inserire una nuova variabile in (D) .

Aggiunta di una variabile in (P) (di un vincolo in (D))

Sia x_{n+1} la nuova variabile da aggiungere, con corrispondente colonna A^{n+1} e coefficiente di costo c_{n+1} . Supponiamo che $x_{n+1} \geq 0$; in questo caso, oltre alla nuova colonna si aggiunge anche la riga corrispondente al vincolo di non negatività della nuova variabile. La nuova matrice è allora

$$A' = \begin{bmatrix} A & A^{n+1} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e la sottomatrice

$$A'_{B'} = \begin{bmatrix} A_B & A_B^{n+1} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

è quadrata e non singolare, quindi è una matrice di base associata alla base $B' = B \cup \{m+1\}$, con $N' = N$. Alla nuova base corrispondono le seguenti soluzioni di base:

- $x' = (\bar{x}, x'_{n+1}) = (\bar{x}, 0)$, che risulta essere ovviamente ammissibile;
- $y' = (y'_{B'}, y'_N)$, dove $y'_N = 0$ e $y'_{B'} = (\bar{y}_B, y'_{m+1})$, con $y'_{m+1} = \bar{y}_B A_B^{n+1} - c_{n+1}$.

La base B' risulta duale ammissibile se e solo se $y'_{m+1} \geq 0$. Nel caso B' non sia duale ammissibile e quindi non ottima, si ha comunque una base di partenza per la procedura *Simplesso Primale*, per cercare l'ottimo del problema trasformato partendo dalla base e dalle soluzioni ottime del problema originario.

Esercizio 3.20 *Si dimostri che le soluzioni x' e y' , sopra indicate, sono le soluzioni di base associate alla base $B' = B \cup \{m+1\}$; si dimostrino le asserzioni fatte sull'ammissibilità primale e duale.*

Supponiamo ora che la nuova variabile x_{n+1} non sia vincolata in segno. In tal caso si possono applicare le trasformazioni (3.3), sostituendo la nuova variabile con la differenza di due variabili non negative, ed ottenendo un problema equivalente la cui matrice dei vincoli è

$$A'' = \begin{bmatrix} A & A^{n+1} & -A^{n+1} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

La sottomatrice

$$A''_{B''} = \begin{bmatrix} A_B & A_B^{n+1} & -A_B^{n+1} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è la matrice di base associata alla base $B'' = B \cup \{m+1, m+2\}$, con $N'' = N$. A B'' sono associate le seguenti soluzioni di base:

- $x'' = (\bar{x}, x''_{n+1}, x''_{n+1}) = (\bar{x}, 0, 0)$, che risulta essere ammissibile;
- $y'' = (y''_{B''}, y''_N)$, dove $y''_N = 0$ e $y''_{B''} = (\bar{y}_B, y''_{m+1}, y''_{m+2})$, con $y''_{m+1} = y''_{m+2} = \bar{y}_B A_B^{n+1} - c_{n+1}$.

Anche in questo caso la base B'' risulta essere duale ammissibile, e quindi ottima, se e solo se $y''_{m+1} \geq 0$ (e quindi $y''_{m+2} \geq 0$). Se ciò non si verifica, B'' costituisce una base di partenza per l'utilizzo della procedura *Simplesso Primale*.

Esercizio 3.21 Si dimostri che le soluzioni x'' e y'' , sopra indicate, sono le soluzioni di base associate alla base $B'' = B \cup \{m+1, m+2\}$; si dimostrino le asserzioni fatte sull'ammissibilità primale e duale.

Esempio 3.30:

Si consideri la coppia di problemi di P.L. dell'esempio 3.29, a cui viene aggiunta una nuova variabile x_3 , la relativa colonna A^3 e la componente c_3 riportati nel seguente problema trasformato:

$$(P') \max \quad \begin{array}{r} 3x_1 \quad +x_2 \quad -2x_3 \\ -2x_1 \quad +x_2 \quad +x_3 \\ x_1 \quad -2x_2 \quad -3x_3 \\ x_1 \quad +x_2 \\ x_1 \quad \quad \quad +x_3 \\ \quad \quad -x_2 \quad +2x_3 \\ \quad \quad \quad \quad -x_3 \end{array} \leq \begin{array}{l} 1 \\ -4 \\ 14 \\ 8 \\ -4 \\ 0 \end{array}$$

Il suo duale è

$$(D') \min \quad \begin{array}{r} y_1 \quad -4y_2 \quad +14y_3 \quad +8y_4 \quad -4y_5 \\ -2y_1 \quad +y_2 \quad +y_3 \quad +y_4 \\ y_1 \quad -2y_2 \quad +y_3 \quad \quad \quad -y_5 \\ y_1 \quad -3y_2 \quad \quad \quad +y_4 \quad +2y_5 \quad -y_6 \\ y_i \geq 0, \quad i = 1, \quad \dots \quad , 6 \end{array} = \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ -2 \end{array}$$

Si ricorda che la base ottima per (P) è $B_1 = \{2, 3\}$, e le corrispondenti soluzioni ottime sono $\bar{x} = [8 \ 6]^T$ e $\bar{y} = [0 \ 2/3 \ 7/3 \ 0 \ 0]$. Inoltre, la matrice di base e la sua inversa sono:

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

La base per il problema trasformato (P') è $B' = B \cup \{6\} = \{2, 3, 6\}$ ($N' = N = \{1, 4, 5\}$), in cui il vincolo $-x_3 \leq 0$ è attivo. La nuova matrice di base e la sua inversa sono:

$$A'_{B'} = \begin{bmatrix} A_B & A_B^{n+1} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A'_{B'}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Verifichiamo che la soluzione primale sia proprio $x' = (\bar{x}, 0)$:

$$x' = A'_{B'}^{-1} b_{B'} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 14 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix};$$

calcoliamo ora la soluzione duale:

$$y'_{B'} = c' A'_{B'}^{-1} = [3 \ 1 \ -2] \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = [2/3 \ 7/3 \ 0], \quad y'_N = 0;$$

quindi la soluzione duale è $y' = [0 \ 2/3 \ 7/3 \ 0 \ 0 \ 0]$. Si noti che si è ottenuto $y'_6 = 0$; infatti, per verifica, applicando la formula fornita si ottiene:

$$y'_6 = \bar{y}_B A_B^6 - c_6 = [2/3 \ 7/3] \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 = -2 + 2 = 0.$$

Si noti che si ottiene una soluzione duale ammissibile e degenere. Pertanto la base B' è ottima, e le soluzioni di base ottime, rispettivamente per (P') e (D') , sono x' e y' .

Riferimenti Bibliografici

F.S. Hillier, G.J. Lieberman, “**Introduzione alla ricerca operativa**”, Franco Angeli, Milano (1999).

K.G. Murty, “**Linear and combinatorial programming**”, Wiley, New York (1976).

M. Padberg, “**Linear optimization and extensions**”, Springer-Verlag, Berlino (1995).

A. Sassano, “**Modelli e algoritmi della ricerca operativa**”, Franco Angeli, Milano (1999).

P. Serafini, “**Ottimizzazione**”, Zanichelli, Bologna (2000).