Capitolo 1

Problemi e Modelli

La *Ricerca Operativa* ha come oggetto lo studio e la messa a punto di metodologie per la soluzione di problemi decisionali. I problemi affrontati nell'ambito della Ricerca Operativa sono tipicamente quelli in cui bisogna prendere decisioni sull'uso di risorse disponibili in quantità limitata in modo da rispettare un insieme assegnato di vincoli, massimizzando il "beneficio" ottenibile dall'uso delle risorse stesse.

Un *processo decisionale* può, in modo schematico, essere decomposto nelle seguenti fasi:

1) individuazione del problema;

2) analisi della realtà e raccolta dei dati;

3) costruzione del modello;

4) determinazione di una o più soluzioni;

5) analisi dei risultati ottenuti.

Chiaramente questi punti non vanno visti come strettamente sequenziali; in un processo decisionale reale è infatti frequente il caso che una delle fasi richieda modifiche dei risultati ottenuti in una fase precedente. Ad esempio, nella costruzione del modello può emergere l'esigenza di nuovi dati in aggiunta a quelli raccolti nella fase precedente. La stessa raccolta dei dati presuppone un'idea sul tipo di modello che sarà costruito. Nello svolgimento del corso concentreremo l'attenzione sui punti (3) e (4), che più si prestano ad una rigorosa trattazione matematica, ed ai quali sono dirette gran parte delle metodologie messe a punto nell'ambito della Ricerca Operativa.

Il *modello* è una descrizione, in generale per mezzo di strumenti di tipo logico-matematico, della porzione di realtà di interesse ai fini del processo decisionale. Ricordiamo qui tre classi principali di modelli: giochi, modelli di simulazione, modelli analitici.

- Nei *giochi*, la difficoltà di modellare in modo matematico il comportamento degli individui o dei gruppi di individui presenti nella realtà sotto esame viene superata introducendo direttamente l'uomo nel modello attraverso i giocatori, a ciascuno dei quali viene affidato un prefissato ruolo.

- Nei *modelli di simulazione* si cerca di descrivere nel modo più accurato possibile il comportamento del sistema che si vuole studiare per mezzo di relazioni matematiche; quindi si studia su calcolatore la sua risposta a sollecitazioni che vengono realizzate, in genere per mezzo di generatori di numeri pseudo casuali, in modo che siano il più possibile simili a quelle reali.

- Nei *modelli analitici* invece tutto il sistema sotto esame è descritto per mezzo di relazioni matematiche (o logiche) tra variabili che rappresentano gli elementi del sistema; quindi si cercano valori per tali variabili che soddisfino i vincoli e che massimizzino o minimizzino una *funzione obiettivo* opportunamente definita.

Alla *Simulazione* è dedicato un corso specialistico. In questo corso, come in altri corsi dell'area di "Ricerca Operativa", restringeremo la nostra attenzione ai modelli analitici: in particolare, i modelli che studieremo in questo corso rientrano in quella parte della Ricerca Operativa che va sotto il nome di Programmazione Matematica.

Nell'analizzare la realtà per mezzo di modelli non va mai dimenticato lo scarto esistente tra la realtà stessa ed il modello: la soluzione di un problema è in realtà sempre la soluzione della rappresentazione che abbiamo costruito del problema reale. È sempre necessario prestare grande attenzione alla fondatezza del modello costruito: il modello sarà sempre una descrizione molto limitata della realtà, ma dovrà rappresentare con ragionevole accuratezza gli aspetti che interessano ai fini della soluzione del problema decisionale che si sta affrontando.

1.1 Problemi

Diamo adesso una serie di definizioni riguardanti i problemi di ottimizzazione. Nel seguito per *problema* intenderemo una domanda espressa in termini generali, la cui risposta dipende da un certo numero di *parametri* e *variabili*. Un problema viene usualmente definito per mezzo di:

- una descrizione dei suoi parametri, in generale lasciati indeterminati;

- una descrizione delle proprietà che devono caratterizzare la risposta o *soluzione* desiderata.

Un'*istanza* di un dato problema (P) è quella particolare domanda che si ottiene specificando valori per tutti i parametri di (P).

Molto spesso un problema viene definito fornendo l'insieme F delle possibili risposte o soluzioni. Di tale insieme, detto *insieme ammissibile*, viene in generale data la struttura mediante i parametri da cui essa dipende; i suoi elementi vengono detti *soluzioni ammissibili*. Frequentemente F viene specificato indicando un insieme di "supporto" F' tale che $F \subseteq F'$, ed ulteriori condizioni (vincoli) che gli elementi di F devono soddisfare. In questo caso, si parla spesso degli elementi di $F' \setminus F$ come di *soluzioni non ammissibili*.

In un *problema di ottimizzazione*, sull'insieme ammissibile F viene definita una *funzione obiettivo*

$$c \; : \; F \; \rightarrow \; \mathbb{R}$$

che fornisce il costo o il beneficio associato ad ogni soluzione; la soluzione del problema è un elemento di F che rende minima, oppure massima, la funzione obiettivo. Un generico *problema di minimo* può essere scritto come

$$(P) \qquad \min \{ \; c(x) : \; x \in F \; \}. \tag{1.1}$$

Sostituendo "min" con "max" in (1.1) si ottiene un *problema di massimo*. Chiamiamo

$$z(P) \; = \; \min \{ \; c(x) \; : \; x \in F \; \}$$

il *valore ottimo* del problema. Una soluzione ammissibile $x^* \in F$ tale che $c(x^*) = z(P)$ è detta *soluzione ottima* per (P). Un problema di ottimizzazione può essere indifferentemente codificato come problema di massimo o di minimo: infatti, è immediato verificare che il problema

$$(P') \qquad -\max \{ \; -c(x) \; : x \in F \; \},$$

è *equivalente* a (P), ossia $z(P) = z(P')$; inoltre, i due problemi hanno lo stesso insieme di soluzioni ottime.

Esempio 1.1: Un problema di equipartizione

Il problema di equipartizione corrisponde alla seguente domanda: dato un insieme di n numeri naturali, $N = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, qual'è il sottoinsieme S di N tale che la differenza in modulo tra la somma dei numeri in S e quella dei numeri in $N \setminus S$ è la più piccola possibile ? Una formulazione matematica del problema è

$$\min \left\{ \; c(S) = \left| \; \sum_{i \in S} a_i - \sum_{i \notin S} a_i \; \right| \; : \; S \subseteq N \; \right\}. \tag{1.2}$$

In questo caso, F è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di N; infatti, l'unica condizione (vincolo) che una risposta (soluzione) deve soddisfare è di essere un sottoinsieme degli n numeri dati. Per questo problema, i *parametri* sono il numero n e gli n numeri "$a_1, a_2, \ldots, a_n$"; scegliendo ad esempio $n = 4$ e $N = \{7, 3, 4, 6\}$ si ottiene una particolare istanza del problema, in cui tutti i parametri sono specificati. Invece, S è la *variabile* del problema: $S = \{3, 7\}$ è una soluzione ottima per l'istanza considerata, con valore ottimo pari a zero.

Dato un problema di ottimizzazione (P), sono possibili quattro casi:

- Il problema è *vuoto*, ossia $F = \emptyset$; in questo caso si assume per convenzione $z(P) = +\infty$ ($-\infty$ per un problema di massimo). L'esistenza di problemi vuoti potrebbe a tutta prima parere paradossale, ma in generale, come vedremo, non è facile stabilire se un insieme F specificato attraverso una lista di condizioni (vincoli) contenga oppure no elementi.

- Il problema è *inferiormente illimitato* (*superiormente illimitato* per un problema di massimo), ossia comunque scelto un numero reale M esiste una soluzione ammissibile $x \in F$ tale che $c(x) \leq M$ ($\geq M$); in questo caso il valore ottimo è $z(P) = -\infty$ ($+\infty$).

- Il problema ha *valore ottimo finito* $-\infty < z(P) < \infty$ ma *non ha soluzione ottima*, ossia non esiste nessun $x \in F$ tale che $c(x) = z(P)$. Un semplice esempio è dato dal problema

  $$\inf \{ \, x \; : \; x > 0 \, \}$$

  che ammette valore ottimo 0 ma nessuna soluzione ottima. Nella pratica tale situazione è indesiderabile, e viene evitata avendo cura di scegliere in modo opportuno c ed F; ciò sarà sempre fatto per i problemi trattati in questo corso.

- Il problema ha *valore ottimo finito* ed *ammette soluzione ottima*.

In certi casi ciò che il problema richiede è semplicemente la determinazione di una qualsiasi soluzione ammissibile, ovvero di fornire un elemento $x \in F$, se ne esiste uno, oppure di dichiarare che F è vuoto; in questo caso si parla di *problema decisionale* oppure di *problema di esistenza*. Dato un problema decisionale definito su $F \subseteq F'$, ad esso è naturalmente associato il *problema di certificato*: dato $x \in F'$, verificare se $x \in F$. Il problema di certificato è un problema decisionale che richiede semplicemente una risposta "sì" oppure "no".

In teoria, qualsiasi problema decisionale può essere formulato come problema di ottimizzazione: basta scegliere un opportuno insieme $F' \supseteq F$ e definire $c(x) = 10$ per ogni $x \in F$, $c(x) = 1$ per ogni $x \in F' \setminus F$. Analogamente, un problema di ottimizzazione può essere espresso come problema decisionale: basta usare come insieme in cui si cerca una soluzione ammissibile l'insieme delle sue soluzioni ottime. Quest'ultima equivalenza è però solamente teorica; in pratica è difficile definire esplicitamente l'insieme delle soluzioni ottime di un problema non essendo noto il suo valore ottimo. In alternativa, dato il problema di ottimizzazione (1.1) possiamo definire il suo *problema decisionale associato*, o sua *versione decisionale*, come il problema di verificare l'esistenza di un soluzione ammissibile nelll'insieme

$$F_k \;=\; \{ \, x \in F \; : \; c(x) \leq k \, \},$$

dove k è un prefissato valore. Si cerca cioè se esiste una soluzione ammissibile del problema di ottimizzazione che fornisca un valore della funzione obiettivo non superiore a k. In un certo senso, il problema decisionale associato ad un problema di ottimizzazione ne è una versione parametrica: facendo variare il parametro k e risolvendo ogni volta un problema di esistenza, è possibile determinare il valore ottimo della funzione obiettivo, o almeno una sua approssimazione con precisione arbitraria (risolvere il problema di ottimizzazione equivale a risolverne la variante decisionale per ogni possibile valore di k).

Per il problema di equipartizione (1.2), il problema decisionale associato richiede di stabilire se esiste un sottoinsieme S tale che la differenza in valore assoluto tra la somma dei numeri in S e quella dei numeri in $N \setminus S$ sia minore od uguale di un dato numero (intero) k. Per $k = 0$ si ottiene il problema di decidere se esiste un sottoinsieme S tale che la la somma dei numeri in S e quella dei numeri in $N \setminus S$ sia uguale.

Il senso di definire un problema di ottimizzazione è, almeno per le applicazioni pratiche, intimamente collegato alla possibilità di sviluppare procedure di calcolo (*algoritmi*) in grado di risolverne efficientemente le istanze. Da questo punto di vista, i problemi di ottimizzazione possono essere divisi in due classi: la classe dei problemi polinomiali ($\mathcal{P}$) e con la classe dei problemi $\mathcal{NP}$-ardui ($\mathcal{NP}$-completi quando si parli di problemi decisionali); per un richiamo di questi concetti si veda l'Appendice A. Data l'esistenza di problemi per i quali non si conoscono algoritmi risolutivi di complessità polinomiale, è opportuno discutere più in dettaglio cosa significhi *risolvere un problema di ottimizzazione*.

In generale, un algoritmo che risolva il problema (P) è una procedura che prende in input una qualsiasi istanza p di (P) e fornisce in output una soluzione ottima x^* per quell'istanza[1]. Un algoritmo per (P) che determini una soluzione ottima per *qualsiasi* istanza del problema viene detto *algoritmo esatto*. Poiché gli algoritmi esatti possono avere complessità troppo elevata, ad esempio esponenziale nelle dimensioni dell'istanza, e quindi difficilmente utilizzabili in pratica, ci si trova spesso nella necessità di ricorrere ad *algoritmi euristici* ossia algoritmi che determinano solamente *una qualsiasi* soluzione ammissibile, e quindi un'*approssimazione superiore* (inferiore per un problema di massimo) del valore ottimo dell'istanza. In generale si è interessati ad ottenere "buone" valutazioni superiori; per questo è opportuno introdurre misure che indichino "quanto buona" è una data soluzione. Si noti che per molti problemi di ottimizzazione, il problema di determinare

[1] In alcuni casi si può essere interessati a determinare *tutte* le soluzioni ottime alternative del problema, ma molto spesso tale insieme può risultare "troppo grande", ad esempio di cardinalità esponenziale nelle dimensioni dell'istanza, e quindi normalmente si accetta che l'algoritmo riporti *una qualsiasi* soluzione ottima.

una qualsiasi soluzione ammissibile ha la stessa complessità del problema originario; quindi, in generale gli algoritmi euristici possono "fallire", ossia non riportare nessuna soluzione ammissibile anche per istanze in cui $F \neq \emptyset$. In questo caso, si assume che la valutazione superiore (inferiore, per un problema di massimo) ottenuta dall'algoritmo sia $+\infty$ ($-\infty$), ossia "arbitrariamente cattiva".

Data un'istanza p del problema di ottimizzazione (P), con valore ottimo $z(p)$, ed una sua soluzione ammissibile $\bar{x} \in F$, l'*errore assoluto* di $\bar{x}$

$$E_{\bar{x}} = c(\bar{x}) - z(p) \quad (\geq 0)$$

è una misura della "bontà" di $\bar{x}$ come soluzione di p. Siccome però tale misura non è invariante rispetto ai cambiamenti di scala, si preferisce utilizzare l'*errore relativo*

$$R_{\bar{x}} = \frac{c(\bar{x}) - z(p)}{|z(p)|};$$

dato $\varepsilon > 0$, la soluzione $\bar{x}$ si dice *ε-ottima* se $R_{\bar{x}} \leq \varepsilon$. Un algoritmo euristico può essere considerato "buono" se produce soluzioni con "basso" errore relativo per *tutte* le istanze di (P): un algoritmo $\mathcal{A}$ si dice quindi *ε-approssimato* se produce una soluzione ε-ottima per ogni istanza. Algoritmi ε-approssimati con ε piccolo possono essere valide alternative interessanti agli algoritmi esatti; per ulteriori informazioni si consulti l'Appendice A.

Si noti che, in generale, $z(p)$ non è noto, per cui calcolare l'errore (assoluto o relativo) di una soluzione $\bar{x}$ è non banale. Un metodo per stimare $z(p)$ è quello di costruire una qualche approssimazione del problema dato, ad esempio tenendo in conto solamente di alcune delle condizioni (vincoli) che le soluzioni ammissibili devono soddisfare. In particolare, si definisce *rilassamento* di (1.1) qualsiasi problema

$$(\bar{P}) \qquad \min \{ \; \bar{c}(x) \; : \; x \in \bar{F} \; \} \tag{1.3}$$

tale che $F \subseteq \bar{F}$ e $\bar{c}(x) \leq c(x)$ per ogni $x \in F$. In altre parole, $(\bar{P})$ è un rilassamento di (P) se ha "più soluzioni" di (P) e/o se la sua funzione obiettivo è un'approssimazione inferiore della funzione obiettivo c di (P) sull'insieme F. È immediato verificare che il valore ottimo di $(\bar{P})$ fornisce una *valutazione inferiore* del valore ottimo di (P), ossia $z(\bar{P}) \leq z(P)$. Nel caso di problemi di massimo, la seconda condizione diventa $\bar{c}(x) \geq c(x)$ per ogni $x \in F$, ed il rilassamento fornisce una *valutazione superiore* del valore ottimo. È spesso possibile definire i rilassamenti in modo che siano risolubili con algoritmi di complessità inferiore rispetto a quelli necessari per il problema originale. Può accadere che risolvere il rilassamento permetta di risolvere direttamente il problema originale; questo capita se la soluzione ottima x^* di $(\bar{P})$ soddisfa le condizioni $x^* \in F$ e $\bar{c}(x^*) = c(x^*)$, ossia è ammissibile per il problema originale e la funzione obiettivo $\bar{c}$ ha in x^* lo stesso valore della funzione obiettivo reale c. In questo caso, infatti, è immediato verificare che x^* è anche *soluzione ottima per* (P), in quanto

$$\bar{c}(x^*) = z(\bar{P}) \leq z(P) \leq c(x^*) = \bar{c}(x^*).$$

Quando ciò non accade, la valutazione inferiore $z(\overline{P})$ e la soluzione x^* del rilassamento possono comunque essere sfruttate per risolvere il problema (P).

1.2 Modelli

La costruzione di un modello analitico di un sistema reale è una delle attività più creative e certamente più utili nello studio di sistemi organizzativi e gestionali, nella progettazione industriale, nella descrizione di sistemi altamente complessi quali quelli informatici ed in molte altre discipline. Pertanto, gli strumenti per la costruzione di modelli rappresentano una componente essenziale nel curriculum dell'informatico, e non soltanto in quello dello specialista di Ricerca Operativa.

In quanto attività creativa, la costruzione di modelli non può affidarsi solamente all'uso di tecniche standard; non esistono cioè metodologie formali in grado di costruire automaticamente un modello analitico, anche se esistono tecniche e strumenti software in grado di facilitare ed automatizzare alcune fasi del processo di modellazione. La costruzione di un modello è comunque lasciata fondamentalmente alla fantasia, alla creatività ed all'esperienza del singolo, il quale può certamente fare riferimento ai modelli che ha incontrato precedentemente cercando di adattarli ove possibile, ma può anche trovarsi nella necessità di crearne di interamente nuovi.

In questo paragrafo forniamo una introduzione alla modellazione, presentando un insieme di modelli elementari che costituiscono i "blocchi di base" per la costruzione di modelli complessi. Nel farlo descriveremo anche alcuni noti problemi di ottimizzazione, che ci aiuteranno ad illustrare l'uso delle diverse tecniche di modellazione e che si incontrano frequentemente nelle applicazioni, o direttamente o – più spesso – come sottoproblemi di problemi più complessi.

1.2.1 Programmazione Lineare

Un problema di *Programmazione Lineare* (*PL*) è un problema di ottimizzazione caratterizzato dalle seguenti proprietà:

1. un numero *finito* n di variabili, che possono assumere valori reali;

2. una funzione obiettivo lineare, cioè del tipo $f(x) = cx$ dove $c \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei costi (fissato) ed $x \in \mathbb{R}^n$ è il vettore delle variabili;

3. l'insieme ammissibile è definito da un insieme finito di m vincoli lineari del tipo $ax = b$, e/o $ax \leq b$, e/o $ax \geq b$, dove $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$.

Un problema di *PL* può sempre essere espresso, ad esempio, per mezzo di una formulazione del tipo

$$\max\{cx : Ax \leq b\}$$

dove A è una matrice reale $m \times n$ e $b \in \mathbb{R}^m$.

I problemi di *PL* formano una delle più importanti classi di modelli di ottimizzazione, poiché permettono di modellare con sufficiente accuratezza molte situazioni reali e possono essere risolti efficientemente in generale, come mostrato nel Capitolo 3. Introduciamo ora alcuni esempi di problemi di *PL*.

1.2.1.1 Pianificazione della produzione

La società *Pintel* deve pianificare la produzione della sua fabbrica di microprocessori. La Pintel possiede due diverse linee di prodotti: i processori *Pintium*, più potenti e destinati al mercato "server", ed i *Coloron*, meno potenti e destinati al mercato "consumer". L'impianto è in grado di realizzare 3.000 "wafer" alla settimana: su ogni wafer trovano posto o 500 Coloron oppure 300 Pintium. La resa di un wafer dipende anch'essa dal tipo di processore: i Coloron, di minori dimensioni, hanno una resa media del 60%, mentre i Pintium, più grandi e quindi maggiormente sottoposti a difetti, solamente del 50%. I processori Pintium si vendono a 500$ al pezzo, mentre i Coloron si vendono a 200$ al pezzo. La divisione commerciale della Pintel ha anche stabilito che la massima quantità di processori che possono essere messi sul mercato ogni settimana senza causare un calo dei prezzi è di 400.000 unità per i Pintium e di 700.000 unità per i Coloron. Si vuole determinare le quantità di ciascun tipo di processore da produrre settimanalmente in modo da massimizzare il ricavo totale.

Formuliamo, matematicamente il problema. A questo scopo introduciamo le variabili x_P ed x_C, che indicano il numero di processori rispettivamente di Pintium e Coloron da produrre. Su queste variabili possiamo innanzitutto porre le seguenti limitazioni superiori ed inferiori sul valore delle variabili

$$0 \leq x_P \leq 400000$$

$$0 \leq x_C \leq 700000$$

che corrispondono al fatto che non è possibile produrre quantità negative di processori, ed alle limitazioni imposte dalla divisione commerciale per impedire un calo dei prezzi.

Restano da considerare le limitazioni legate al processo produttivo. Per esprimerle, indichiamo con w_P e w_C il numero di wafer utilizzati per produrre rispettivamente i Pintium e i Coloron; il seguente vincolo lega queste due variabili alla produzione settimanale

$$w_P + w_C \leq 3000.$$

Conoscendo il numero di pezzi per wafer e la resa produttiva si ottengono queste relazioni che legano il numero di pezzi processori funzionanti con il numero di wafer prodotti:

$$\begin{aligned} x_P &= w_P \cdot 300 \cdot 0.5 = w_P \cdot 150, \\ x_C &= w_C \cdot 500 \cdot 0.6 = w_C \cdot 300. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Eliminando le due variabili w_P e w_C dal vincolo sulla produzione settimanale si ottiene il vincolo

$$2x_P + x_C \leq 900000.$$

Quindi, l'insieme ammissibile F per il problema è il seguente:

$$F = \{(x_P, x_C) : 0 \leq x_P \leq 400000, 0 \leq x_C \leq 700000, 2x_P + x_C \leq 900000\}$$

Ad esempio, $(x_P, x_C) = (0, 0)$ è ovviamente una soluzione ammissibile per il problema. Un ovvio insieme di "supporto" per il modello è $F' = \mathbb{R}^2$, e la soluzione

$$(x_P, x_C) = (400000, 700000)$$

non è ammissibile per il problema in quanto viola il vincolo sulla capacità di produzione dei wafers.

Il ricavo ottenuto dalla vendita della produzione settimanale è dato dalla seguente funzione (lineare) nelle variabili decisionali del problema:

$$c(x_P, x_C) = 500x_P + 200x_C.$$

Di conseguenza, un modello analitico per il problema della Pintel è il seguente:

$$\begin{array}{lrcrl} \text{Max} & 500x_P & + & 200x_C & \\ & x_P & & & \leq 400000 \\ & & & x_C & \leq 700000 \\ & 2x_P & + & x_C & \leq 900000 \\ & x_P & , & x_C & \geq 0 \end{array}$$

Una volta determinata la soluzione (x_P, x_C), ossia in termini di processori, è possibile ricavare la soluzione (w_P, w_C), ossia in termini di wafers, semplicemente utilizzando le relazioni (1.4).

Esercizio 1.1 *Fornire tre diverse soluzioni ammissibili e valutare i ricavi che si ottengono.*

L'insieme ammissibile del problema della Pintel è mostrato in Figura 1.1 (entrambi gli assi sono stati scalati di un fattore 100.000 per comodità di rappresentazione).

L'insieme ammissibile è il *poliedro convesso* tratteggiato, delimitato dalle rette corrispondenti ai vincoli del problema. È possibile verificare che,

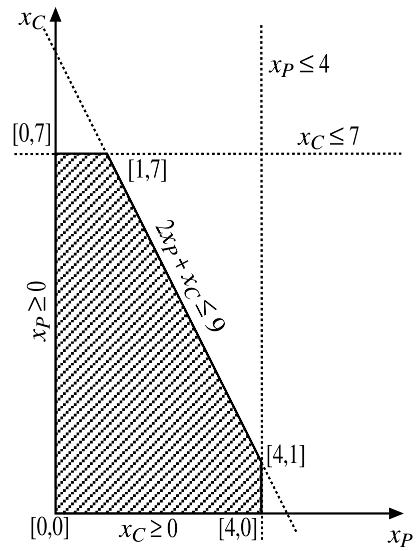

Figura 1.1: Insieme ammissibile per il problema della Pintel

per la linearità della funzione obiettivo, una soluzione ottima del problema (se esiste) si trova sempre in un *vertice* del poliedro, in questo caso quello corrispondente al punto $(4, 1)$.

Un aspetto che resta ancora da discutere è il dominio ammissibile per la variabili w_P e w_C. Tali variabili rappresentano la produzione di unità discrete di bene (i singoli wafers), e quindi sarebbe ragionevole imporre l'ulteriore vincolo che, nella soluzione attesa del problema, esse possano assumere soltanto valori interi. Si noti che imporre l'interezza di w_P e w_C *non* è equivalente ad imporre l'interezza di x_P e x_C; la soluzione ottima del problema è $(x_P, x_C) = (400000, 100000)$, quindi intera, ma tale soluzione corrisponde, in termini di wafers, a $(w_P, w_C) = (2666.\bar{6}, 333.\bar{3})$.

D'altro canto, i dati del problema sono tali per cui si può ragionevolmente ipotizzare che una differenza di un wafer non cambi sostanzialmente la qualità della soluzione in pratica: le stime della divisione commerciale hanno presumibilmente un rilevante margine di incertezza, ed anche il vincolo sul numero di wafers è probabilmente soggetto a rilevanti incertezze (guasti di macchinari o scioperi, eventi imprevedibili, ecc.) per cui la produzione di wafers in ogni specifica settimana potrebbe essere leggermente diversa da quella ipotizzata. In queste circostanze, si può pensare che, ad esempio, la soluzione ammissibile intera $(w_P, w_C) = (2666, 334)$ sia comunque una "buona" decisione in pratica; per questo, è ragionevole ammettere valori frazionari per le variabili w_P ed w_C.

1.2.1.2 Il problema della Fonderia

Una fonderia deve produrre 1000 pezzi del peso ciascuno di un chilogrammo. Il ferro con cui tali pezzi sono fatti dovrà contenere manganese e silicio nelle seguenti quantità:

$$\begin{array}{rcccl} 0.45\% & \leq & \text{manganese} & & \\ 3.25\% & \leq & \text{silicio} & \leq & 5.5\% \end{array}$$

Sono disponibili tre tipi di materiale ferroso con le seguenti caratteristiche:

Materiale ferroso	A	B	C
Silicio (%)	4.00	1.00	0.60
Manganese (%)	0.45	0.50	0.40
Costo (Euro / kg.)	0.025	0.030	0.018

Inoltre si può aggiungere direttamente manganese al costo di 10 Euro al kg.

Il problema che si vuole modellare è quello di determinare il piano di produzione che minimizza il costo del materiale utilizzato. Si vuole cioè individuare le quantità di materiale per ciascuno dei tre tipi A, B, o C e di manganese puro da acquistare per produrre i 1000 pezzi richiesti, spendendo il meno possibile.

Proviamo a costruire un modello analitico per il problema. A questo scopo introduciamo le variabili x_1, x_2, x_3, x_4, aventi il seguente significato:

$x_1(\geq 0)$: la quantità in kg di materiale ferroso A da utilizzare;
$x_2(\geq 0)$: la quantità in kg di materiale ferroso B da utilizzare;
$x_3(\geq 0)$: la quantità in kg di materiale ferroso C da utilizzare;
$x_4(\geq 0)$: la quantità in kg di manganese da utilizzare.

Abbiamo imposto che le quantità di prodotto acquistate siano dei valori non negativi (vincoli di non negatività). Esistono poi altri vincoli che dovranno essere rispettati e che descriviamo di seguito. Il numero totale di kg prodotti deve essere 1000:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1000.$$

La quantità di silicio, in kg, presente nel prodotto risultante è data da

$$0.04x_1 + 0.01x_2 + 0.006x_3.$$

La percentuale di silicio nel prodotto finito sarà quindi data da

$$100\frac{0.04x_1 + 0.01x_2 + 0.006x_3}{1000}.$$

Tale numero deve essere compreso tra 3.25 e 5.5. Possiamo quindi esprimere la condizione sulla percentuale di silicio mediante i due vincoli lineari

$$\begin{array}{l} 4x_1 + x_2 + 0.6x_3 \geq 3250, \\ 4x_1 + x_2 + 0.6x_3 \leq 5500. \end{array}$$

Analogamente, per la condizione sulla percentuale di manganese si ottiene

$$0.45x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 + 100x_4 \geq 450.$$

Infine il costo del prodotto risultante è

$$0.025x_1 + 0.030x_2 + 0.018x_3 + 10x_4.$$

Il problema della determinazione di un piano di produzione che minimizza il costo può quindi essere formulato come segue:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 0.025x_1 & + & 0.030x_2 & + & 0.018x_3 & + & 10x_4 & & \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 0.6x_3 & & & \geq & 3250 \\
 & 4x_1 & + & x_2 & + & 0.6x_3 & & & \leq & 5500 \\
 & 0.45x_1 & + & 0.5x_2 & + & 0.4x_3 & + & 100x_4 & \geq & 450 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1000 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Le variabili x_1, x_2, x_3 e x_4 corrispondono alle scelte operative che il problema reale richiede di compiere, e ciascun vincolo del modello corrisponde ad una condizione imposta dal problema reale. Determinare i valori delle variabili in modo che i vincoli siano soddisfatti e la funzione obiettivo assuma il minimo valore fornisce il miglior piano di produzione.

1.2.2 Variabili logiche

Negli esempi precedenti abbiamo incontrato variabili che rappresentano il livello di attività produttive, come il numero di processori da produrre in 1.2.1.1 oppure il numero di pezzi da produrre nella fonderia in 1.2.1.2. Variabili di questo tipo vengono anche dette *variabili quantitative*; ciò che le caratterizza è il fatto di rappresentare quantità di beni, di oggetti da produrre, comprare o utilizzare, oppure valori assunti da grandezze fisiche o economiche.

In altri casi le variabili rappresentano delle scelte di tipo logico (sì, no). Si parla allora di *variabili logiche*; si tratta in generale di *variabili booleane*, o *binarie*, che possono assumere uno solo dei valori 0 o 1, attribuendo al valore 0 il significato di *falso* ed a 1 quello di *vero*.

È importante sottolineare come l'uso di variabili logiche, o più in generale di variabili vincolate ad assumere solamente un insieme discreto di valori, se da un lato aumenta l'espressività dei modelli di ottimizzazione, dall'altro ne può rendere molto difficile la soluzione. Si definiscono problemi di *Programmazione Lineare Intera* (*PLI*), o *Mista*, i problemi in cui i vincoli e la funzione obiettivo sono lineari, come nel caso della *PL*, ma in cui tutte le variabili, o un loro sottoinsieme, possono assumere solamente valori interi. Mentre la *PL* è un problema "facile", la *PLI* è in generale un problema "difficile" (si veda l'Appendice A).

Vediamo adesso alcuni esempi di modelli che usano variabili logiche.

1.2.2.1 Il problema dello zaino

Sia dato un insieme $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ di elementi, a ciascuno dei quali sia assegnato un peso a_i ed un costo c_i, $i = 1, \ldots, n$, interi e positivi: il problema dello zaino (KP, da *Knapsack Problem*) consiste nel determinare un sottoinsieme di elementi che abbia costo totale massimo ed il cui peso totale non superi un prefissato intero b. Il nome deriva dal fatto che viene usualmente descritto come il problema di scegliere quali oggetti di un dato insieme mettere in uno zaino in modo da non superare un dato peso (o capacità) e da massimizzare il valore complessivo degli oggetti selezionati. Si assume che sia $0 < b < \sum_i a_i$, altrimenti il problema sarebbe banale; si assume anche che sia $a_i \leq b$ per $i = 1, \ldots, n$, in quanto nessun elemento di peso superiore alla capacità b può far parte di una soluzione ammissibile, e quindi ogni elemento di peso superiore a b può essere eliminato da E.

Il problema può essere scritto come un problema di massimo, con

$$\begin{array}{lcl} F & = & \{S \subseteq E : \sum_{i \in S} a_i \leq b\} \\ c(S) & = & \sum_{i \in S} c_i . \end{array}$$

In questa descrizione del problema, il sottoinsieme S è l'unica variabile, che prende valori nell'insieme delle parti di E (2^E) ed è soggetta al vincolo $\sum_{i \in S} a_i \leq b$.

Possiamo formulare il problema come *PLI* introducendo, per ogni oggetto $i = 1, 2, \ldots, n$, una variabile logica $x_i \in \{0, 1\}$, con il significato che la variabile assume valore 1 se l'elemento i-esimo appartiene al sottoinsieme selezionato, e 0 altrimenti (si decide cioè se inserire o meno l'oggetto).

La condizione relativa alla capacità dello zaino diviene

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b \; ;$$

infatti, dato che ciascuna x_i può assumere solo i valori 0 o 1, nella somma vengono considerati i pesi dei soli oggetti selezionati. Analogamente, la funzione obiettivo, da massimizzare, è

$$c(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \; ;$$

nella funzione obiettivo si sommano i costi dei soli oggetti selezionati. Globalmente, la formulazione che si ottiene è

$$(\mathrm{KP}) \quad \begin{array}{lll} \max & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i x_i & \leq b \\ & x_i \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Il problema dello zaino può essere trasformato in un problema di minimo con vincolo di $\geq$ (in letteratura si trovano entrambe le formulazioni).

Esercizio 1.2 *Costruire un'istanza del problema dello zaino con 6 oggetti, definendone costo e peso; formulare quindi l'istanza, fornire due soluzioni ammissibili e valutarne il costo.*

1.2.2.2 Albero di copertura di costo minimo

La banca Gatto & Volpe ha molte filiali sparse per l'Italia ed un Centro Elettronico Unificato (CEU) in cui vengono svolte tutte le transazioni. La banca ha bisogno di collegare tutte le filiali col CEU: per ragioni di sicurezza i dati non possono transitare sulla rete pubblica, e quindi occorre affittare linee dedicate. È possibile affittare una linea dedicata dal CEU ad ogni filiale, ma, se la capacità delle linee è sufficientemente grande, ciò non è necessario: può essere più conveniente collegare gruppi di filiali "vicine" tra loro, e solo una di esse col CEU. Il problema è quindi quello di determinare quali linee affittare (nell'ipotesi che la capacità delle linee sia sufficiente) per collegare tutte le filiali al CEU minimizzando il costo di affitto.

Per modellare il problema, si può considerare un grafo non orientato $G = (N, A)$, dove N è l'insieme dei nodi con $|N| = n$, A è l'insieme degli archi con $|A| = m$ e ad ogni arco $a \in A$ è associato un costo c_a reale positivo (per maggiori dettagli sui grafi, si rinvia all'Appendice B). Nel grafo, ogni nodo rappresenta una filiale, tranne un nodo "radice" che rappresenta il CEU, e gli archi rappresentano i potenziali collegamenti tra coppie di filiali o tra filiali e CEU, con il relativo costo. Il problema del progetto della rete dati della banca può quindi essere formulato matematicamente come il problema di determinare un grafo parziale $G' = (N, A')$, connesso e di costo minimo, dove il costo di G' è dato dalla somma dei costi degli archi in A'. È facile verificare che la struttura di collegamento ottimale (qualora la capacità delle linee sia sufficiente) è un albero di copertura di G, cioè un grafo parziale di G che sia connesso e privo di cicli. Il problema del progetto della rete dati della banca corrisponde quindi al problema di ottimizzazione con

$$\begin{array}{lcl} F & = & \{T \subseteq A : (N, T) \text{ è un albero di copertura per } G\} \\ c(T) & = & \sum_{a \in T} c_a. \end{array}$$

Possiamo formulare analiticamente il problema di determinare l'*albero di copertura di costo minimo* (MST, da *Minimal Spanning Tree*) introducendo, per ogni arco $a \in A$, una variabile logica x_a che assume il valore 1 se l'arco a viene selezionato per formare l'albero di copertura e 0 se l'arco non viene selezionato, ed utilizzando le nozioni di taglio (N', N'') di un grafo G, e di insieme degli archi del taglio $A(N', N'')$ (per maggiori dettagli si veda l'Appendice B).

Affinché l'insieme degli archi selezionati formi un grafo parziale connesso, è necessario e sufficiente che, per ogni taglio (N', N'') vi sia almeno un arco $a \in A(N', N'')$ con $x_a = 1$. Pertanto, imponendo i seguenti *vincoli di connessione*

$$\sum_{a \in A(N',N'')} x_a \geq 1, \qquad \forall (N', N'') \tag{1.5}$$

si garantisce che i valori assunti dalle variabili decisonali definiscano un grafo parziale connesso.

La funzione obiettivo, da minimizzare, è

$$\sum_{a \in A} c_a x_a \ ,$$

pertanto una formulazione alternativa per il problema è la seguente:

$$(\text{MST}) \qquad \begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{a \in A} c_a x_a & \\ & \displaystyle\sum_{a \in A(N',N'')} x_a \geq 1 & \forall (N', N'') \\ & x_a \in \{0, 1\} & a \in A \end{array}$$

Nell'ipotesi che i pesi siano strettamente positivi, è facile verificare che qualunque soluzione ottima x^* del problema definisce un albero di copertura di costo minimo. Infatti, qualunque soluzione ammissibile rappresenta un sottografo connesso di G, che quindi contiene sicuramente un albero di copertura. Se per assurdo la soluzione rappresentasse un sottografo con più di $n-1$ archi, ossia non fosse un albero, allora tale sottografo conterrebbe almeno un ciclo: eliminando un qualsiasi arco di questo ciclo si otterrebbe ancora un grafo connesso, il cui vettore di incidenza $\bar{x}$ sarebbe una soluzione ammissibile per il problema con costo strettamente minore di x^*, il che contraddice l'ottimalità di quest'ultima.

Questa formulazione "basata sui tagli" ha un numero esponenziale di vincoli, uno per ogni possibile sottoinsieme proprio di N. Esistono altre formulazioni con un numero polinomiale di vincoli. In generale, come vedremo nel seguito, formulazioni diverse dello stesso problema possono essere utili in quanto possono suggerire approcci algoritmici diversi.

Esercizio 1.3 *Costruire un'istanza del problema dell'albero di copertura di costo minimo per un grafo con 4 nodi e 6 archi, definendo i pesi degli archi; formulare quindi l'istanza utilizzando i vincoli sui tagli, fornire due soluzioni ammissibili e valutarne il costo.*

1.2.2.3 Il problema del commesso viaggiatore

Un commesso viaggiatore deve consegnare le sue mercanzie in n località, compresa quella in cui si trova. Egli conosce le distanze tra ogni coppia di località, e vuole organizzare il suo viaggio in modo da minimizzare la distanza percorsa. Il suo problema può essere rappresentato mediante un grafo non orientato e completo (cioè contenente tutti i possibili archi) $G = (N, A)$, dove N è l'insieme dei nodi ($|N| = n$) che rappresentano le località, A è l'insieme degli archi ($|A| = m = n(n-1)/2$) e ad ogni arco $(i, j) \in A$ è associato un costo c_{ij}, reale e positivo, che rappresenta la distanza tra le località associate ai nodi i e j.

L'attività del commesso viaggiatore, ossia visitare in sequenza le n località rientrando alla località di partenza, corrisponde a un *ciclo Hamiltoniano* sul grafo G, cioè una sequenza di archi che inizia e termina nello stesso nodo e che passa attraverso gli altri nodi una ed una sola volta. La lunghezza del ciclo Hamiltoniano è la somma dei pesi (distanze) dei suoi archi. Quello che il commesso viaggiatore vuole determinare è il più corto tra tutti i cicli Hamiltoniani, per cui il *problema del commesso viaggiatore* (TSP, da *Travelling Salesman Problem*) è anche detto *problema del ciclo Hamiltoniano di lunghezza minima*. (TSP) ha molte applicazioni pratiche, tipicamente collegate a problemi di trasporto, ma non solo: ad esempio, problemi analoghi si ritrovano nel servire in modo ottimale n richieste di lettura/scrittura su uno stesso disco magnetico (in ambiente parallelo o concorrente) minimizzando il ritardo dovuto ai movimenti della testina. Si osservi che l'avere supposto il grafo completo non comporta alcuna limitazione; infatti, è sempre possibile rendere completo un grafo qualsiasi con l'aggiunta di archi a costo opportunamente elevato ($+\infty$).

(TSP) è un problema di ottimizzazione in cui l'insieme ammissibile F è l'insieme di tutti i cicli Hamiltoniani del grafo G, e la funzione obiettivo $c(P)$ è la lunghezza del ciclo Hamiltoniano P. La sua versione decisionale richiede di determinare se il grafo G ha un ciclo Hamiltoniano di lunghezza non superiore ad un prefissato valore k.

Per costruire una formulazione *PLI* di (TSP), utilizziamo, analogamente a quanto fatto per (MST), una variabile logica x_{ij} per ogni arco $(i, j) \in A$, che vale 1 se (i, j) appartiene al ciclo scelto e 0 altrimenti. La funzione obiettivo, da minimizzare, può essere allora scritta come

$$\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}.$$

Il fatto che si voglia ottenere un ciclo comporta che in ciascun nodo incidano esattamente due archi, proprietà che può essere imposta per mezzo dei vincoli:

$$\sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} = 2, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \ (i, j) \in A. \tag{1.7}$$

Si noti come l'ipotesi che le variabili siano logiche (vincoli (1.7)), sia critica per garantire che i vincoli 1.6 assicurino che nel sottografo rappresentato dalle variabili $x_{ij} > 0$ ciascun nodo abbia esattamente due archi incidenti. Qualsiasi vincolo, ove presente, va indicato esplicitamente.

I vincoli (1.6) non garantiscono che gli archi (i, j) le cui variabili associate x_{ij} assumono il valore 1 formino un ciclo Hamiltoniano; infatti esse garantiscono solo una *copertura per cicli* del grafo, come illustrato nell'esempio in figura 1.2 in cui gli archi selezionati formano una copertura di tutti i nodi del grafo mediante due cicli disgiunti, uno di 3 archi e l'altro di 4.

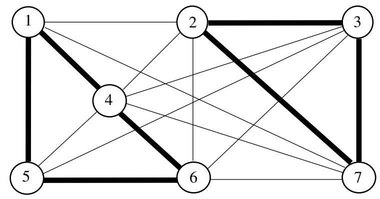

Figura 1.2: una copertura per cicli (archi in grassetto)

Per imporre che gli archi selezionati formino un unico ciclo (Hamiltoniano) possiamo utilizzare i vincoli di connessione sui tagli (1.5), introdotti per (MST). L'aggiunta dei vincoli di connessione ai vincoli di copertura per cicli (1.6) impone che la copertura per cicli formi un grafo connesso: ciò è possibile solo se si ha un unico ciclo nella copertura, che è quindi un ciclo Hamiltoniano. La formulazione completa di (TSP) diventa quindi

$$
(\mathrm{TSP}) \qquad
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} & \\
& \displaystyle\sum_{(i,j)\in A(N',N'')} x_{ij} \geq 1 & \forall (N', N'') \\
& \displaystyle\sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_{ij} = 2 & i = 1, \ldots, n \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & (i, j) \in A
\end{array}
$$

Come per (MST), esistono delle formulazioni per (TSP) con un numero polinomiale di vincoli; per esse si rinvia alla bibliografia suggerita.

Esercizio 1.4 *Assegnare dei pesi agli archi del grafo in figura 1.2 supponendo che gli archi mancanti abbiano peso infinito. Costruire quattro cicli Hamiltoniani e valutarne la loro lunghezza.*

Esercizio 1.5 *Costruire un'istanza con un grafo completo con 4 nodi e formulare il (TSP) per tale istanza.*

Si può notare che la formulazione di (TSP) coincide con quella di (MST) a cui sono stati aggiunti i vincoli (1.6). Pertanto, l'insieme ammissibile di (MST) contiene quello di (TSP); siccome la funzione obiettivo è identica, (MST) è un *rilassamento* di (TSP).

1.2.3 Relazioni logiche

Spesso, le relazioni tra i valori di variabili booleane sono assimilabili alle ben note relazioni logiche tra *variabili proposizionali*, ossia variabili che possono assumere i valori *vero* o *falso*. In effetti, si possono costruire vincoli lineari tra variabili logiche equivalenti alle classiche relazioni logiche del calcolo proposizionale. Nel seguito, dato un letterale (proposizione elementare) a del calcolo proposizionale indicheremo con $x(a)$ la corrispondente variabile booleana, associando il valore 1 di $x(a)$ al valore *vero* di a ed il valore 0 di $x(a)$ al valore *falso* di a.

Analizziamo adesso le più comuni relazioni tra variabili proposizionali.

Negazione. Data la variabile proposizionale a, la variabile complementare $b = \neg a$ viene rappresentata facilmente dalla *variabile complementare* $x(b) = 1 - x(a)$, con $x(b) \in \{0, 1\}$. Se si hanno due variabili proposizionali a e b e si vuole imporre che una sia il complemento dell'altra, è sufficiente imporre alle corrispondenti variabili booleane di rispettare il vincolo $x(a) + x(b) = 1$.

Implicazione. La relazione logica $a \Rightarrow b$ (a "implica" b) è esprimibile mediante la disuguaglianza $x(b) \geq x(a)$; infatti, $x(b)$ è forzata ad assumere il valore 1 se $x(a) = 1$.

Unione (Or). Date due variabili proposizionali a e b, la variabile $c = a \vee b$, che assume il valore *vero* quando almeno una delle due variabili è vera, può essere espressa mediante le seguenti relazioni:

$$x(c) \geq x(a), \;\; x(c) \geq x(b), \;\; x(c) \leq x(a) + x(b), \;\; x(c) \in \{0, 1\}.$$

Infatti, le due prime diseguaglianze impongono alla variabile booleana $x(c)$ di assumere il valore 1 se una delle due altre variabili ha il valore 1. La terza impone il valore $x(c) = 0$ se $x(a) = x(b) = 0$.

Unione esclusiva (Or esclusivo). Date due variabili proposizionali a e b, la variabile $c = a \oplus b$, che assume il valore *vero* quando una sola delle due variabili è vera, può essere espressa mediante le seguenti relazioni:

$$x(c) \geq x(a) - x(b), \; x(c) \geq x(b) - x(a),$$

$$x(c) \leq x(a) + x(b), \; x(c) \leq 2 - x(a) - x(b), \; x(c) \in \{0, 1\}.$$

Infatti, le due prime diseguaglianze impongono alla variabile booleana $x(c)$ di assumere il valore 1 quando una sola delle due altre variabili ha il valore 1. La terza impone il valore $x(c) = 0$ se $x(a) = x(b) = 0$ e la quarta impone $x(c) = 0$ se $x(a) = x(b) = 1$.

Intersezione (And). Date due variabili logiche a e b, la variabile $c = a \wedge b$, che assume il valore *vero* solo quando entrambe le due variabili siano vere, può essere espressa mediante le seguenti relazioni:

$$x(c) \leq x(a), \quad x(c) \leq x(b), \quad x(c) \geq x(a) + x(b) - 1, \quad x(c) \in \{0, 1\}.$$

Infatti, le prime due diseguaglianze impongono alla variabile booleana $x(c)$ di assumere il valore 0 quando almeno una delle due altre variabili ha il valore 0. La terza impone il valore $x(c) = 1$ se $x(a) = x(b) = 1$.

In generale, è possibile formulare molti problemi del calcolo proposizionale sotto forma di problemi di ottimizzazione. Questo tipo di formulazione permette di utilizzare tecniche di ottimizzazione in alternativa o in appoggio alle normali tecniche inferenziali usate nel calcolo logico.

1.2.3.1 Soddisfattibilità

Il problema della *Soddisfattibilità Proposizionale* (SAT, da *SATisfiability*) richiede di determinare se una data formula del calcolo proposizionale in *Forma Normale Congiuntiva*

$$A = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$$

è soddisfattibile, dove $C_1, C_2, \ldots, C_m$ sono clausole del tipo

$$C_i = \pm P_1 \vee \pm P_2 \vee \ldots \vee \pm P_r$$

e con $\pm P_j$ si indica o il letterale P_j o la sua negazione $\neg P_j$, $j = 1, \ldots, n$. Si vuole cioè determinare se esiste un assegnamento di valore di verità *vero* o *falso* alle proposizioni elementari $P_1, P_2, \ldots, P_n$ che renda vera la formula A. Siccome qualsiasi formula del calcolo proposizionale può essere portata in FNC, questo problema ha rilevanti applicazioni pratiche, ad esempio per il progetto e la verifica di circuiti digitali VLSI.

Introduciamo n variabili logiche x_j associate ai letterali P_j, $j = 1, \ldots, n$, e definiamo

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se il letterale } P_j \text{ appare diretto nella clausola } C_i \ , \\ -1 & \text{se il letterale } P_j \text{ appare negato nella clausola } C_i \ , \\ 0 & \text{se il letterale } P_j \text{ non appare nella clausola } C_i \ . \end{cases}$$

Dato un qualunque vettore $x \in \{0, 1\}^n$, che possiamo interpretare come un assegnamento di valori di verità agli n letterali $P_1, \ldots, P_n$, è facile verificare che la clausola C_i è soddisfatta dall'assegnamento di valori di verità corrispondente ad x se e solo se risulta

$$\sum_j a_{ij} x_j \geq 1 - n(i) \ ,$$

dove $n(i)$ è il numero di letterali che appaiono negati in C_i. Di conseguenza, una formulazione *PLI* di (SAT) è

$$\begin{array}{lll} \text{Max} & \sum_j a_{1j} x_j & \\ & \sum_j a_{ij} x_j & \geq 1 - n(i) \quad i = 2, \ldots, m \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad j = 1, \ldots, n & \end{array}$$

Infatti, qualsiasi soluzione ammissibile x per il problema corrisponde ad un assegnamento di valori di verità alle proposizioni elementari che rende vere tutte le clausole C_2, C_3, $\ldots C_m$. Se la soluzione ottima x^* del problema soddisfa anche la clausola C_1, cioè se risulta $\sum_j a_{1j} x^*_j \geq 1 - n(1)$, allora x^* corrisponde ad un assegnamento di valori di verità alle proposizioni elementari che soddisfa A, e quindi A è soddisfattibile; altrimenti, non può esistere nessun assegnamento di valori di verità alle variabili che soddisfa contemporaneamente C_1 e tutte le altre clausole, e quindi A non è soddisfattibile. Una variante di (SAT) è il problema di ottimizzazione nel quale si cerca l'assegnamento di valori di verità ai letterali che massimizza il numero delle clausole C_i soddisfatte (Max-SAT).

Esercizio 1.6 *Si dia una formulazione analitica di (Max-SAT).*

Esiste una rilevante interfaccia tra problemi legati al calcolo logico e problemi di ottimizzazione: in effetti, (SAT) è stato il primo problema che è stato dimostrato essere $\mathcal{NP}$-completo (si veda l'Appendice A). Ciò permette di utilizzare tecniche di ottimizzazione per la soluzione di problemi relativi al calcolo logico e, viceversa, tecniche di inferenza per risolvere problemi di ottimizzazione. Esistono persino alcuni interessanti risultati teorici che mostrano come le deduzioni logiche nel calcolo proposizionale possono essere viste come combinazioni lineari dei vincoli nella corrispondente formulazione di *PLI*, e quindi come le tecniche inferenziali siano un caso particolare di alcune tecniche per la risoluzione di problemi di *PLI*, dimostrando come la relazione tra ottimizzazione e calcolo logico sia profonda.

1.2.4 Vincoli di assegnamento e semiassegnamento

Descriviamo adesso due tipi di vincoli – su variabili logiche – che sono utilizzati molto di frequente in modelli di *PLI*. Sia $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un insieme di n oggetti e $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un insieme di m elementi, che possono rappresentare altri tipi di oggetti, persone, sottoinsiemi, ecc. a seconda del contesto. Introduciamo la variabile logica x_{ij} col seguente significato: $x_{ij} = 1$ indica che all'oggetto i è stato assegnato l'elemento v_j, mentre $x_{ij} = 0$ indica che l'elemento v_j non è stato assegnato ad i.

I *vincoli di semiassegnamento* impongono che a ciascun oggetto sia assegnato uno ed un solo elemento:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Si noti ancora una volta come l'ipotesi che le variabili siano binarie, ossia che $x_{ij} \in \{0, 1\}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$, sia critica per garantire la correttezza di questi vincoli: rilassando il *vincolo di integralità*, esiste ad esempio, la soluzione frazionaria

$$x_{ij} = 1/m, \qquad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m,$$

che ovviamente non ha nessuna possibile interpretazione in termini del significato che si vuol dare alle variabili.

Capita spesso che un certo oggetto i possa essere assegnato solamente ad un dato insieme $B(i)$ di elementi "ammissibili" per i; in questo caso, è sufficiente definire le variabili x_{ij} solamente per le coppie (i, j) con $j \in B(i)$, e modificare i vincoli di semiassegnamento in

$$\sum_{j \in B(i)} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n \,.$$

Quando i due insiemi N e V hanno la stessa cardinalità, cioè $m = n$, è possibile che nel modello venga richiesto che anche a ciascun elemento sia assegnato uno e un solo oggetto; in tal caso si utilizzeranno i *vincoli di assegnamento*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &= 1, \qquad i = 1, \ldots, n \,, \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} &= 1, \qquad j = 1, \ldots, n \,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

I vincoli di assegnamento possono essere utilizzati per creare un *ordinamento* tra oggetti. Si supponga che, all'interno di un problema, si debba decidere con quale ordine effettuare n lavori $1, 2, \ldots, n$. In tal caso, i vincoli (1.8) impongono un ordinamento dei lavori se associamo ad ogni variabile x_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, il seguente significato:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se il lavoro } i \text{ è effettuato come } j\text{-esimo,} \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In altri termini, una soluzione ammissibile per i vincoli di assegnamento assegna ad ogni lavoro i una posizione all'interno dell'ordinamento.

Presentiamo adesso tre modelli in cui vengono utilizzati i vincoli di semiassegnamento.

1.2.4.1 Assegnamento di costo minimo

L'agenzia matrimoniale Cuori Solitari deve organizzare il gran ballo di fine anno. L'agenzia ha n clienti maschi e n clienti femmine, ed ha prenotato n tavoli da due posti al famoso ristorante Cupido. Dai profili psicologici raccolti dai clienti, l'agenzia è in grado di calcolare, per ogni maschio

i, l'insieme $F(i)$ delle femmine con le quali potrebbe essere interessato ad intrecciare una relazione, e che potrebbero essere interessate ad intrecciare una relazione con lui; un analogo insieme $M(j)$ può essere ottenuto per ogni femmina j. Dai profili dei clienti, l'agenzia è anche in grado di calcolare, per ogni coppia (i,j) "compatibile", il costo c_{ij} della cena da offrire, che deve consistere di piatti graditi ad entrambi i commensali. L'agenzia vuole quindi decidere come formare le coppie per il gran ballo in modo da evitare coppie incompatibili e minimizzare il costo complessivo delle cene.

Una formulazione del problema dell'agenzia Cuori Solitari fa uso dei vincoli di assegnamento in cui C indica l'insieme delle coppie compatibili:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{(i,j)\in C} c_{ij}x_{ij} & \\
& \sum_{j\in F(i)} x_{ij} = 1 & i = 1,\ldots,n \\
& \sum_{i\in M(j)} x_{ij} = 1 & j = 1,\ldots,n \\
& x_{ij} \in \{0,1\} & (i,j) \in C
\end{array}
$$

Questo problema, noto come il problema dell'assegnamento di costo minimo, è polinomiale ed ha molte applicazioni in pratica; algoritmi per la sua soluzione sono descritti nella Sezione 2.7.

Dato un grafo non orientato G, il problema di determinare una copertura per cicli di costo minimo del grafo (si veda 1.2.2.3) può essere formulato come un problema di assegnamento di costo minimo: sia gli oggetti i che gli indici j corrispondono ai nodi del grafo, e le coppie (i,j) "compatibili" corrispondono agli archi del grafo, con il relativo costo. Di conseguenza, il problema dell'assegnamento di costo minimo è un rilassamento di (TSP).

Si noti quindi come lo stesso problema possa avere molti rilassamenti diversi: ad esempio, sia il problema dell'assegnamento di costo minimo che il (MST) sono rilassamenti del (TSP). Diversi rilassamenti possono "catturare" parti diverse della struttura combinatoria di un problema: ad esempio, (MST) incorpora il vincolo di connessione ma non quello della formazione di cicli, mentre il problema dell'assegnamento incorpora il vincolo della formazione di cicli ma non quello di connessione.

Infine, si noti che sia il problema dell'assegnamento che (MST) sono problemi "facili", mentre (TSP), che può essere considerato "l'intersezione" di questi due problemi, è "difficile". In generale, solo in casi molto particolari l'intersezione di due strutture combinatorie corrispondenti a problemi "facili" genera un problema a sua volta "facile".

1.2.4.2 Ordinamento di lavori su macchine: minimizzazione del numero delle macchine

Questo problema appare frequentemente in diversi ambiti, ad esempio in quello manifatturiero, nella gestione di sistemi informatici e nella gestione di progetti. Siano dati n *lavori* e m *macchine* uguali, su cui far eseguire i lavori. Il lavoro i-esimo, $i = 1,\ldots,n$, può essere svolto su ciascuna macchina e richiede un tempo di esecuzione d_i indipendente dalla macchina su cui viene eseguito. Il lavoro i-esimo viene consegnato al tempo t_i e deve essere immediatamente eseguito; essendo d_i la sua durata, l'esecuzione terminerà al tempo $t_i + d_i$. Il numero m di macchine è a priori illimitato (ovviamente, è sufficiente che sia $m = n$; se fosse $m > n$, alcune delle macchine sarebbero comunque inutilizzate). L'obiettivo è utilizzare il minimo numero possibile di macchine per eseguire tutti i lavori, assegnando alla stessa macchina lavori i cui tempi di esecuzione non si sovrappongano.

Si noti che una soluzione ammissibile corrisponde ad una partizione dell'insieme $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ in m sottoinsiemi $N(1), N(2), \ldots, N(m)$, che possono anche essere vuoti, in cui il generico sottoinsieme $N(j), j = 1, \ldots, m$, rappresenta i lavori assegnati alla j-esima macchina.

Per descrivere il problema, introduciamo mn variabili logiche x_{ij}, intendendo che $x_{ij} = 1$ se il lavoro i viene eseguito sulla macchina j, e $x_{ij} = 0$ altrimenti. La variabile x_{ij} rappresenta l'appartenenza o meno di i a $N(j)$. Per rappresentare mediante le variabili x_{ij} l'insieme delle soluzioni ammissibili, dobbiamo imporre che ogni lavoro sia assegnato ad una ed una sola macchina, il che può essere espresso mediante i vincoli di semiassegnamento

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, n \; . \tag{1.9}$$

Dobbiamo inoltre garantire che se due lavori i e h sono assegnati alla stessa macchina j, allora i loro tempi di elaborazione, cioè gli intervalli $]t_i, t_i + d_i[$ e $]t_h, t_h + d_h[$, siano *disgiunti*; in altri termini si deve avere che o $t_i + d_i \le t_h$ (il lavoro i termina prima dell'inizio del lavoro h), oppure il viceversa, $t_h + d_h \le t_i$. Per ogni lavoro, $i = 1, \ldots, n-1$, definiamo l'insieme $S(i)$ dei lavori h, con $h > i$, che sono *incompatibili* con esso:

$$S(i) = \{h \in \{i+1, \ldots, n\} :]t_i, t_i + d_i[\cap]t_h, t_h + d_h[\neq \emptyset\}, \; i = 1, \ldots, n-1.$$

Si noti che gli *insiemi di incompatibilità* $S(i), i = 1, \ldots, n-1$, sono dei dati di "input" del problema. Mediante tali insiemi possiamo scrivere i seguenti *vincoli di compatibilità*:

$$x_{ij} + x_{hj} \le 1, \; i = 1, \ldots, n-1, h \in S(i), \quad j = 1, \ldots, m \; .$$

I vincoli di compatibilità impediscono che le variabili relative a due lavori incompatibili assumano entrambe valore 1. Il numero dei vincoli di incompatibilità dipende dai conflitti tra gli intervalli di tempo, e quindi dalla somma delle cardinalità degli insiemi di incompatibilità moltiplicato il numero m di macchine; tale numero è certamente non superiore a $mn(n-1)/2$.

Esercizio 1.7 *Dimostrare l'asserzione precedente.*

Per formulare la funzione obiettivo si deve esprimere il numero di macchine utilizzate; in questo caso è conveniente introdurre, per ogni macchina j, un'ulteriore variabile logica $y_j \in \{0, 1\}$ che assume il valore 1 se essa viene utilizzata e 0 altrimenti. In tal modo la funzione obiettivo, da minimizzare, è

$$\sum_{j=1}^{m} y_j.$$

Si deve quindi esprimere il legame tra le macchine utilizzate (cioè le variabili y_j) e i lavori assegnati ad esse (cioè le variabili x_{ij}); in altri termini si deve imporre che se alla macchina j è stato assegnato almeno un lavoro, allora "deve" essere $y_j = 1$. Ciò è esprimibile in due modi distinti:

$$y_j \geq x_{ij},\ i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m; \tag{1.10}$$

oppure

$$ny_j \geq \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.11}$$

Il primo insieme di mn vincoli (1.10) forza $y_j = 1$ se almeno una delle variabili x_{ij} ha valore 1; tale insieme di vincoli è corrispondente alle implicazioni logiche "se il lavoro i viene eseguito sulla macchina j, allora la macchina j è utilizzata" (cf. 1.2.3). Il secondo insieme, di soli m vincoli, (1.11) mette in relazione y_j con il numero $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ di lavori assegnati a j. Se esso è positivo, sicuramente non superiore ad n, il vincolo impone $y_j = 1$. Si noti ancora una volta come le variabili booleane abbiano una "doppia natura", logica e numerica.

La formulazione analitica del problema (MCMS, da *Minimal Cardinality Machine Scheduling*) che utilizza i vincoli (1.10) è:

$$(\text{MCMS}) \quad \begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{m} y_j & \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & x_{ij} + x_{hj} \leq 1 & i = 1, \ldots, n-1, h \in S(i),\ j = 1, \ldots, m \\ & y_j \geq x_{ij} & i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m \\ & y_j \in \{0, 1\} & j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Si noti che, se alla macchina j non sono stati assegnati lavori, y_j può assumere entrambi i valori 0 e 1; siccome si minimizza la somma delle y_j, e nessun vincolo impone che y_j sia 1, all'ottimo tale variabile assumerà il corretto valore 0. Questo vale anche per il modello che usa i vincoli (1.11).

Si ricordi sempre che i vincoli di integralità sulle variabili devono sempre essere esplicitamente indicati, altrimenti le variabili potrebbero assumere valori non interi. È immediato verificare che nel *rilassamento continuo*, in cui le variabili x_{ij} possono assumere qualsiasi valore nell'intervallo $[0,1]$, viene persa una parte sostanziale della struttura del problema originario.

Esercizio 1.8 *Dimostrare che la rimozione dei vincoli $y_j \in \{0,1\}, j = 1,\dots,m$ non può essere applicata se si usano i vincoli (1.11) al posto dei vincoli (1.10).*

Esercizio 1.9 *Costruire un'istanza del problema (MCMS) con 7 lavori, definendo le durate e i tempi di inizio di essi; formulare quindi l'istanza, fornire due soluzioni ammissibili e valutare il numero di macchine occorrenti.*

1.2.4.3 Assegnamento di frequenze

Un gestore di telefonia cellulare dispone di n stazioni radio base in grado di coprire tutta la città. Per poter attivare la rete, però, deve assegnare a ciascuna antenna una frequenza di trasmissione in modo tale che le antenne adiacenti – che servono celle sovrapposte – non producano interferenza. È disponibile un insieme $F = \{f_1,\dots,f_m\}$, di frequenze, in cui ogni f_i è un valore numerico (espresso in Mhz o Ghz), e la relazione di adiacenza tra le antenne è rappresentata da un grafo (non orientato) $G = (N, A)$ in cui i nodi rappresentano le antenne ed esiste l'arco $(i, j) \in A$ se e solo se le due antenne i e j sono adiacenti, ossia servono celle che presentano sovrapposizioni, e quindi assegnando la stessa frequenza a i ed a j si creerebbe interferenza. Dato che acquisire il diritto di uso di ogni frequenza ha un costo, il gestore vuole determinare un'assegnamento di frequenze alle antenne che non produca interferenza e che utilizzi il minimo numero di frequenze: si noti che a due nodi non adiacenti nel grafo può in linea di principio essere assegnata la stessa frequenza. In altre parole, si vuole "colorare" il grafo G con i "colori" f_i in modo tale che i nodi adiacenti abbiano colori diversi e che il numero di colori utilizzati sia minimo.

Per descrivere il problema, introduciamo nm variabili logiche x_{if}, intendendo che $x_{if} = 1$ se la frequenza f viene assegnata all'antenna i. Siccome ad ogni antenna deve essere assegnata una ed una sola frequenza, dobbiamo imporre i vincoli di semiassegnamento

$$\sum_{f \in F} x_{if} = 1, \qquad i = 1,\dots,n\ .$$

Dobbiamo inoltre garantire che l'assegnamento di frequenze non causi interferenza, ossia che ai nodi adiacenti siano assegnate frequenze diverse. Questo può essere fatto attraverso i vincoli logici

$$x_{if} + x_{jf} \le 1, \qquad (i,j) \in A\ , \quad f \in F\ .$$

Per formulare la funzione obiettivo si deve esprimere il numero di frequenze utilizzate; in questo caso è conveniente introdurre, per ogni frequenza f, un'ulteriore variabile logica y_f che assume il valore 1 se essa viene utilizzata, 0 altrimenti. La funzione obiettivo, da minimizzare, è $\sum_{f \in F} y_f$.

Si deve quindi esprimere il legame tra le frequenze utilizzate (cioè le variabili y_f) e le antenne a cui sono assegnate (cioè le variabili x_{if}); questo può essere fatto ad esempio mediante i vincoli

$$y_f \geq x_{if},\ i = 1, \ldots, n,\ f \in F,$$

che garantiscono che la variabile y_f ha valore 1 se almeno un'antenna utilizza la frequenza f. La formulazione analitica del problema (GC, da *Graph Coloring*) è:

$$
(\mathrm{GC}) \qquad
\begin{array}{lll}
\min & \sum_{f \in F} y_f & \\
& \sum_{f \in F} x_{if} = 1 & i = 1, \ldots, n \\
& x_{if} + x_{jf} \leq 1 & (i,j) \in A, \quad f \in F \\
& y_f \geq x_{if} & i = 1, \ldots, n, \quad f \in F \\
& x_{if} \in \{0,1\} & i = 1, \ldots, n, \quad f \in F \\
& y_f \in \{0,1\} & f \in F
\end{array}
$$

Il problema (GC) è quindi un molto simile caso al problema (MCMS) se interpretiamo le frequenze come macchine, le antenne come lavori e gli insiemi di incompatibilità tra lavori (antenne) come la relazione di adiacenza sul grafo G.

Esercizio 1.10 *Si formuli la generalizzasione del problema (GC) in cui ad ogni antenna i devono essere assegnate esattamente n_i frequenze diverse e anche "frequenze vicine" fanno interferenza, nel senso che se a due nodi adiacenti i e j vengono assegnate due frequenze h e k, allora occorre che h e k siano "distanti" ossia che $|f_h - f_k| > \delta$ per una soglia δ fissata.*

1.2.5 Selezione di sottoinsiemi

Abbiamo già visto, nel problema di ordinamento di lavori su macchine 1.2.4.2 come formalizzare la partizione di un insieme in più sottoinsiemi. Riprendiamo ora questo problema generalizzandolo.

Sia $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ un insieme finito di elementi, e F una famiglia di m suoi sottoinsiemi:

$$F = \{F_1, F_2, \ldots, F_m\},$$

con $F_j \subseteq N, j = 1, \ldots, m$. Ad ogni sottoinsieme F_j è associato un costo c_j, $j = 1, \ldots, m$; il problema che vogliamo considerare è quello di determinare una sottofamiglia $D \subseteq F$ di costo minimo che soddisfi particolari vincoli.

Mostriamo innanzitutto come sia possibile rappresentare la famiglia F di sottoinsiemi di N e come si possano definire delle variabili che individuano la sottofamiglia D. La famiglia F può essere rappresentata mediante una matrice $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, i cui elementi sono così definiti:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \in F_j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Introduciamo poi m variabili decisionali $x_1, x_2, \ldots, x_m$, con $x_j = 1$ se si sceglie di inserire F_j in D e $x_j = 0$ altrimenti, $j = 1, \ldots, m$. Il costo di D è allora definito da:

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j .$$

Considereremo tre tipi di vincoli, detti rispettivamente di copertura, di partizione e di riempimento, che danno origine a tre diversi problemi di selezione di sottoinsiemi.

Problema di copertura

Supponiamo che si voglia che ogni elemento di N sia selezionato almeno una volta, cioè che appaia in almeno uno degli insiemi di D. Formalizziamo questa richiesta attraverso il vincolo di copertura

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, \ldots, n \,, \tag{1.12}$$

che garantisce che per ogni $i \in N$ esista almeno un indice j per cui è contemporaneamente $a_{ij} = 1$ e $x_j = 1$, ossia che esista almeno un sottoinsieme F_j in D che contiene l'elemento i. Il problema di copertura è allora così definito:

$$(\text{PC}) \qquad \begin{array}{lll} \min & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j x_j & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \geq 1 & i = 1, \ldots, n \\ & x_j \in \{0,1\} & j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Esempio 1.2:
Il direttore di un canale televisivo per le informazioni locali deve organizzare il lavoro delle squadre di giornalisti e operatori per coprire n diversi servizi fuori sede. Il caporedattore ha predisposto m possibili attività che una singola squadra può svolgere, dove una attività è l'insieme dei servizi che possono essere svolti e comporta un determinato costo di retribuzione della squadra, comprensivo dei costi per la trasferta e eventuali ore di straordinario. Il direttore deve decidere quali delle attività far svolgere in modo da pagare il meno possibile con la garanzia che ciascuno dei servizi sia "coperto" da almeno una squadra. Il problema è chiaramente un problema di copertura.

Problema di partizione

Supponiamo che si voglia che ogni elemento di N sia selezionato esattamente una volta, cioè che appaia in uno ed uno solo degli insiemi di D. Formalizziamo questa richiesta attraverso il vincolo di partizione

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = 1, \quad i = 1, \ldots, n \,, \tag{1.13}$$

che garantisce, che per ogni $i \in N$, esista un solo indice j per cui è contemporaneamente $a_{ij} = 1$ e $x_j = 1$, ossia che esista esattamente un sottoinsieme F_j in D che contiene l'elemento i. Il problema di partizione si ottiene facilmente sostituendo i vincoli (1.13) a quelli di copertura (1.12); pertanto, una formulazione del problema è:

$$(PP) \qquad \begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{m} c_j x_j & \\ & \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & x_j \in \{0,1\} & j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Esempio 1.3:
Il direttore di un cantiere nel Mugello per la nuova linea di alta velocità deve appaltare n diversi lavori. L'ufficio appalti ha predisposto m diversi possibili incarichi di appalto, ciascuno dei quali è formato da un sottoinsieme dei lavori che, per ragioni di efficienza esecutiva, è bene siano eseguiti dalla stessa ditta. Per ciascun incarico di appalto è definito anche il costo. Il problema è di decidere quali appalti assegnare affinché tutti i lavori siano svolti e il costo degli appalti sia minimo. Questo problema può essere facilmente formulato come problema di partizione.

Problema di riempimento

Supponiamo che si voglia che ogni elemento di N sia selezionato non più di una volta, cioè che appaia in al più uno degli insiemi di D. Formalizziamo questa richiesta attraverso il vincolo di riempimento

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \leq 1, \quad i = 1, \ldots, n \,,$$

che garantisce che per ogni $i \in N$ non possa esistere più di un indice j per cui sia contemporaneamente $a_{ij} = 1$ e $x_j = 1$, ossia che esista al più un sottoinsieme F_j in D contente l'elemento i. Il problema di riempimento è allora così definito:

$$
(PR) \qquad \begin{array}{lll} \min & \sum_{j=1}^{m} c_j x_j & \\ & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \leq 1 & i = 1, \ldots, n \\ & x_j \in \{0, 1\} & j = 1, \ldots, m \end{array}
$$

Si noti che, se tutti i costi sono non negativi, questo problema ha banalmente soluzione ottima nulla; per questo, lo si trova più spesso formulato come problema di massimizzazione.

Esempio 1.4: United colors of flowers
Il famoso allestitore di vetrine Ulivetto Laziali è stato chiamato a predisporre la vetrina del più importante fioraio di Pescia. Con gli n fiori, di forma e colore diversi, che il fioraio gli ha fornito, Ulivetto produce m diversi bozzetti di composizione floreale e per ciascuno di essi fornisce anche un punteggio di "bellezza compositiva". Decide quindi di allestire in vetrina un insieme di composizioni floreali che massimizzi il punteggio globale (definito come somma dei punteggi delle singole composizioni realizzate). Il problema è chiaramente un problema di riempimento in quanto non si possono realizzare due composizioni contenenti lo stesso fiore.

Esercizio 1.11 *Sia data la famiglia* $F = \{\{1,3,5\}, \{2,3\}, \{1,4\}, \{3,4,5\}, \{2\}, \{5\}, \{1,5\}\}$ *formata da* 7 *sottoinsiemi di* $N = \{1,2,3,4,5\}$*. Formulare i problemi di copertura, partizione e riempimento sapendo che il vettore dei costi è* $c = [3,5,1,9,2,4,1]$*. Determinare una soluzione ammissibile, se esiste, per ciascun problema.*

Esercizio 1.12 *Si formulino analiticamente i problemi di copertura, partizione e riempimento generalizzati in cui ogni oggetto* i *deve far parte di, rispettivamente, almeno, esattamente ed al più* b_i *sottoinsiemi.*

Esercizio 1.13 *Si formulino analiticamente le ulteriori generalizzazioni dei problemi di copertura, partizione e riempimento generalizzati dell'esercizio precedente in cui di ogni sottoinsieme* F_j *si possano prendere più copie, eventualmente limitate ad un numero massimo di* u_j*.*

1.2.6 Variabili a valori discreti

Come abbiamo visto in molti esempi precedenti, le variabili booleane hanno, nei modelli, una "doppia natura": da una parte vengono interpretate come variabili logiche, e quindi il loro valore viene associato a valori di verità, dall'altra sono normali variabili numeriche il cui dominio è limitato ad un insieme di valori discreti, per cui si può operare su di esse con le usuali operazioni aritmetiche. In questa e nelle successive sezioni mostreremo ulteriori esempi in cui questa "doppia natura" viene sfruttata.

Una variabile che può assumere solo alcuni, specifici, valori è detta *variabile a valori discreti*. Si pensi, ad esempio, a una variabile x che rappresenta la velocità di trasmissione fra due nodi collegati da modem e da un cavo telefonico: in questo caso essa può assumere solo uno dei valori corrispondenti alle velocità dei modem in commercio. Per esprimere la condizione $x \in \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ possiamo introdurre n variabili booleane $y_1, y_2, \ldots, y_n$, in cui, per ogni i, $y_i = 1$ se $x = v_i$, e $y_i = 0$ altrimenti. I vincoli

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 1$$

$$y_i \in \{0,1\}, \ i = 1, \ldots, n$$

garantiscono che la x, espressa come

$$x = \sum_{i=1}^{n} v_i y_i,$$

assuma uno solo degli n possibili valori.

Vediamo adesso un esempio di uso di queste variabili.

1.2.6.1 Progetto di reti

Si vogliono collegare le reti fognarie di alcuni centri residenziali e industriali ad un impianto di depurazione e smaltimento. Ogni centro produce una quantità nota di rifiuti (liquidi), ed è necessario dimensionare opportunamente l'impianto di collegamento al depuratore in modo da consentirne il trasporto. Si possono scegliere condotte di diversa portata e il costo di messa in opera di una condotta sarà una funzione della sua portata.

Si consideri ad esempio il grafo $G = (N, A)$ di figura 1.3(a) dove i nodi da 1 a 4 rappresentano i centri ed il nodo 5 rappresenta il depuratore. Accanto ad ogni nodo è indicata la quantità di liquido da depurare per unità di tempo prodotta dal centro ad esso corrispondente.

Ogni arco $(i, j) \in A$ rappresenta un possibile collegamento; fra di essi andranno scelti quelli che verranno effettivamente costruiti, e per ciascuno dei collegamenti costruiti si dovrà determinare la portata. Osserviamo che i collegamenti hanno una direzione prefissata di percorrenza.

Una soluzione ammissibile è data da un insieme di collegamenti che garantiscano il fluire dei liquidi da tutti i centri fino al depuratore. In figura 1.3(b) è rappresentata una possibile soluzione.

Forniamo una descrizione analitica del problema mediante delle variabili quantitative x_{ij}, una per ogni arco (i, j) del grafo, che rappresentano la quantità di rifiuti liquidi inviati da i a j, nell'unità di tempo, lungo tale condotta. Esse sono chiaramente vincolate ad essere non negative; il valore $x_{ij} = 0$ indica che si è deciso di non utilizzare l'arco (i, j). Dobbiamo adesso introdurre dei vincoli che garantiscano che i rifiuti prodotti da ciascun

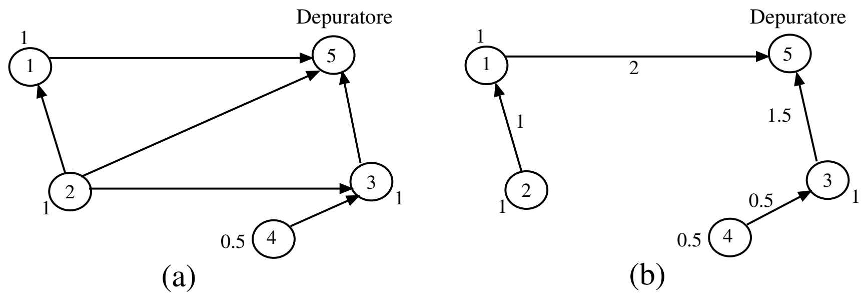

Figura 1.3: Progetto di una rete fognaria

centro giungano al depuratore. I rifiuti, per giungere al depuratore, dovranno passare per qualcuna delle condotte che vi arrivano direttamente, dovrà essere

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 3.5 \ .$$

Vincoli analoghi possono essere scritti per i nodi corrispondenti agli altri centri; in questo caso, però, è necessario tenere in conto anche del flusso in uscita dal nodo. In altri termini, per ogni centro occorre garantire che tutto il flusso che vi giunge, sia quello ivi prodotto che quello che lo attraversa proveniendo da altri centri, sia inviato, attraverso qualcuna delle condotte che escono dal nodo, o direttamente al depuratore o comunque ad un diverso centro, dal quale poi sarà ulteriormente instradato fino a raggiungere il depuratore. Ad esempio per il nodo 3 si ha

$$x_{23} + x_{43} + 1 = x_{35} \ ,$$

mentre per il nodo 1 si ha

$$x_{21} + 1 = x_{15} \ .$$

Per i nodi che hanno solamente archi uscenti, 2 e 4, i vincoli saranno

$$1 = x_{21} + x_{25} + x_{23} \ , \qquad\qquad 0.5 = x_{43} \ .$$

Il costo di posa della condotta corrispondente all'arco (i, j) dipende fondamentalmente dalla portata della condotta e dalla lunghezza del tratto da compiere. Se supponiamo che siano disponibili condotte di qualsiasi portata, possiamo pensare di installare, su ogni arco, una condotta di portata esattamente pari a quella richiesta dal flusso dei rifiuti, in quanto non si avrebbe nessun vantaggio a fare altrimenti. Se supponiamo inoltre che il costo della condotta dipenda linearmente sia dalla lunghezza del tratto da compiere che dalla portata, abbiamo che il costo di installare una condotta sufficiente ad inviare la quantità di rifiuti x_{ij} dal centro i al centro j attraverso la condotta che li unisce direttamente è $c_{ij}x_{ij}$, dove $c_{ij} = \delta l_{ij}$, l_{ij} è la lunghezza del tratto da i a j e δ è il costo per unità di lunghezza di una condotta di capacità unitaria. In questo caso il problema del progetto di reti può essere formulato come [2]

$$\begin{array}{lrrrrrrrr}
\min & c_{15}x_{15} & +c_{21}x_{21} & +c_{23}x_{23} & +c_{25}x_{25} & +c_{35}x_{35} & +c_{43}x_{43} & & \\
& -x_{15} & +x_{21} & & & & & = & -1 \\
& & -x_{21} & -x_{23} & -x_{25} & & & = & -1 \\
& & & +x_{23} & & -x_{35} & +x_{43} & = & -1 \\
& & & & & & -x_{43} & = & -0.5 \\
& x_{15} & & & +x_{25} & +x_{35} & & = & 3.5 \\
& x_{15}, & x_{21}, & x_{23}, & x_{25}, & x_{35}, & x_{43} & \geq & 0
\end{array}$$

In generale, però, a causa delle economie di scala il costo di posa di una condotta sarà una funzione concava del tipo di quella indicata in figura 1.4. In ascissa si ha il valore x della sezione della condotta e in ordinata si ha il costo $f(x)$ della posa in opera della condotta; ad ogni $(i, j) \in A$ è associata una funzione $f_{ij}(x)$ che fornisce il costo globale dell'acquisto e posa in opera della condotta con portata x lungo tutto il tratto da i a j. Se supponiamo che siano disponibili condotte di qualsiasi portata, il problema diventa

$$\begin{array}{lrrrrrrrr}
\min & \multicolumn{6}{l}{f_{15}(x_{15}) + f_{21}(x_{21}) + f_{23}(x_{23}) + f_{25}(x_{25}) + f_{35}(x_{35}) + f_{43}(x_{43})} & & \\
& -x_{15} & +x_{21} & & & & & = & -1 \\
& & -x_{21} & -x_{23} & -x_{25} & & & = & -1 \\
& & & +x_{23} & & -x_{35} & +x_{43} & = & -1 \\
& & & & & & -x_{43} & = & -0.5 \\
& x_{15} & & & +x_{25} & +x_{35} & & = & 3.5 \\
& x_{15}, & x_{21}, & x_{23}, & x_{25}, & x_{35}, & x_{43} & \geq & 0
\end{array}$$

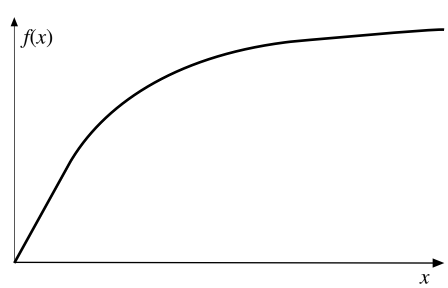

Figura 1.4: Funzione costo

Si noti che questo problema ha una funzione obiettivo nonlineare. Nella realtà, però, le condotte sono solitamente disponibili soltanto in un numero

[2] Si noti che, portando nel lato sinistro di ogni equazione tutte le variabili e nel lato destro le costanti, si ottiene che tutte le variabili corrispondenti ad archi entranti in un nodo appaiono nel vincolo corrispondente con segno negativo, mentre tutte quelle corrispondenti ad archi uscenti dallo stesso nodo appaiono nel vincolo con segno positivo.

finito di portate diverse; nel nostro esempio, supponiamo che le condotte sono disponibili in tre sole dimensioni, con portate rispettivamente 0.7, 1.4 e 3. In questo caso non possiamo più supporre che la portata della condotta installata sia uguale alla quantità di rifiuti effettivamente inviati: potrebbe infatti essere necessario installare condotte di portata maggiore. Per questo introduciamo un altro insieme di variabili quantitative y_{ij}, una per ogni arco (i, j) del grafo, che rappresentano la portata della condotta installata tra il nodo i ed il nodo j (0 se non viene installata nessuna condotta). Ovviamente, occorre inserire i vincoli

$$x_{ij} \leq y_{ij}, \qquad (i, j) \in A,$$

che garantiscono che la quantità di flusso inviata lungo ogni condotta non sia superiore alla portata della condotta effettivamente installata. Un modello analitico del nostro problema di progetto di reti diventa

$$\begin{array}{lrrrrrrcrl}
\min & \multicolumn{9}{l}{f_{15}(y_{15}) + f_{21}(y_{21}) + f_{23}(y_{23}) + f_{25}(y_{25}) + f_{35}(y_{35}) + f_{43}(y_{43})} \\
& -x_{15} & +x_{21} & & & & & = & -1 & \\
& & -x_{21} & -x_{23} & -x_{25} & & & = & -1 & \\
& & & +x_{23} & & -x_{35} & +x_{43} & = & -1 & \\
& & & & & & -x_{43} & = & -0.5 & \\
& x_{15} & & & +x_{25} & +x_{35} & & = & 3.5 & \\
& \multicolumn{8}{c}{0 \leq x_{ij} \leq y_{ij}} & (i,j) \in A \\
& \multicolumn{8}{c}{y_{ij} \in \{0, 0.7, 1.4, 3\}} & (i,j) \in A
\end{array}$$

Possiamo adesso trasformare questo problema in modo da sostituire le variabili quantitative y_{ij}, vincolate ad assumere un insieme discreto di valori, con variabili logiche. Per esprimere il vincolo

$$y_{ij} \in \{0, 0.7, 1.4, 3\} \ ,$$

introduciamo, per ogni arco (i, j), tre nuove variabili booleane y^1_{ij}, y^2_{ij} e y^3_{ij} e sostituiamo il vincolo con

$$y_{ij} = 0.7y^1_{ij} + 1.4y^2_{ij} + 3y^3_{ij} \tag{1.14}$$

$$y^1_{ij} + y^2_{ij} + y^3_{ij} \leq 1 \tag{1.15}$$

$$y^1_{ij}, y^2_{ij}, y^3_{ij} \in \{0, 1\}$$

Utilizzando i vincoli (1.14) possiamo poi sostituire y_{ij} ovunque con

$$0.7y^1_{ij} + 1.4y^2_{ij} + 3y^3_{ij} \ ,$$

eliminando così tutte le variabili y_{ij} ed i vincoli (1.14) dal problema. Questo ci consente anche di ottenere nuovamente una funzione obiettivo lineare: infatti si ha che

$$f_{ij}(0.7y^1_{ij} + 1.4y^2_{ij} + 3y^3_{ij}) = f_{ij}(0.7)y^1_{ij} + f_{ij}(1.4)y^2_{ij} + f_{ij}(3)y^3_{ij}$$

e quindi il problema del progetto di reti può essere modellato come un problema di Programmazione Lineare Intera.

Si noti che, di fatto, in questo caso non siamo interessati al valore delle funzioni f_{ij} in tutti i punti, ma ai loro valori nei punti di ascissa 0.7, 1.4 e 3. In effetti, è possibile formulare il problema eliminando completamente le variabili relative alle condotte, e considerando come costo per il flusso x_{ij} che passa per l'arco (i, j) il costo della più piccola sezione in commercio sufficiente a trasportare quella quantità di flusso. Di conseguenza, il costo del flusso ha la forma, detta *a gradini*, della funzione mostrata in figura 1.5.

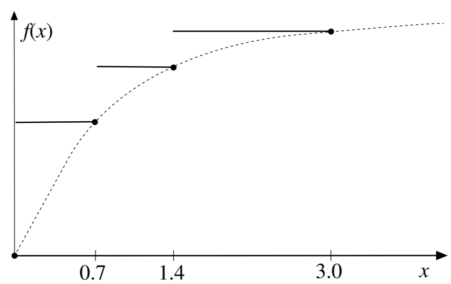

Figura 1.5: Una funzione costo a gradini

Nel seguito verrà mostrato come rappresentare questo tipo di funzioni mediante funzioni lineari e variabili logiche.

1.2.7 Minima quantità positiva prefissata

Spesso nella pianificazione della produzione (o trasporto) di beni, si ha un doppio livello di decisione: il primo sulla produzione o meno del bene, e il secondo livello sulla quantità di beni da produrre all'interno di un intervallo $[l, u]$, con $l > 0$. In pratica si ha che la variabile x, che rappresenta la produzione, può assumere valori solamente nell'insieme $\{0, [l, u]\}$, cioè $x = 0$ rappresenta la decisione di "non produzione", mentre $x \in [l, u]$ indica la produzione in caso di decisione positiva.

Per modellare i valori che x può assumere, introduciamo una variabile logica y che assume il valore 0 se si decide di non produrre, e il valore 1 se si è deciso di produrre. Possiamo allora scrivere:

$$ly \leq x \leq uy\ ,\ y \in \{0, 1\},\ \ x \in \mathbb{R};$$

infatti, se $y = 0$, la variabile x è "forzata" ad assumere il valore 0, mentre se $y = 1$, essa può assumere un qualsiasi valore reale nell'intervallo $[l, u]$.

1.2.8 Funzione con carico fisso

Si consideri la seguente funzione "con carico fisso" che si vuole minimizzare:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ b + cx & \text{se } 0 < x \leq u, \end{cases} \tag{1.16}$$

dove è $b > 0$ e u è un opportuno reale positivo (si veda anche la figura 1.6).

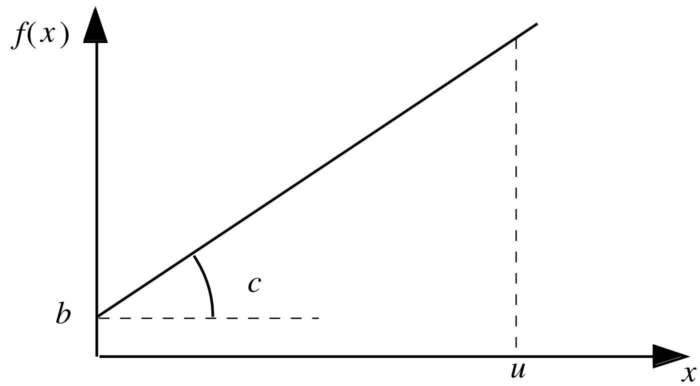

Figura 1.6: una funzione con "carico fisso"

La funzione costo $f(x)$ compare spesso nei problemi di produzione: se non si produce ($x = 0$) non vi è costo ($f(x) = 0$); se si decide di produrre (con il limite della capacità produttiva u) allora si ha un costo di investimento b, fisso ed indipendente dalla produzione, e un costo di produzione $c > 0$ per unità di prodotto.

Per rappresentare analiticamente una tale funzione *concava* nell'intervallo $[0, u]$, analogamente a quanto fatto nel caso precedente, introduciamo la variabile decisionale y col seguente significato: $y = 0$ implica $x = 0$ e $y = 1$ implica $x \geq 0$. Le condizioni che legano la variabile x alla y sono:

$$0 \leq x \leq yu \;, \; y \in \{0, 1\} \;, \; x \in \mathbb{R}.$$

Si noti che il limite superiore u è essenziale nella formulazione. Nei casi pratici è sempre possibile introdurre un valore finito che sia un limite superiore ai valori che la variabile x può assumere.

Possiamo ora sostituire la funzione $f(x)$ con una nuova funzione:

$$g(x, y) = by + cx;$$

infatti, quando $y = 0$ si ha $g(0, 0) = f(0) = 0$, mentre quando $y = 1$ si ha $g(x, 1) = b + cx$. Osserviamo che i vincoli introdotti non escludono la possibilità che sia contemporaneamente $y = 1$ e $x = 0$, in questo caso avremmo $g(0, 1) \neq f(0)$. Quindi la $g(x, y)$ non riesce a rappresentare in modo univoco $f(x)$; tuttavia, poiché il nostro obiettivo è minimizzare $f(x)$ e quindi $g(x,y)$, la soluzione $(x,y) = (0,1)$ viene esclusa essendo

$$g(0,1) = b > g(0,0) = 0 = f(0).$$

Naturalmente, la formulazione proposta non sarebbe adeguata se l'obiettivo fosse la massimizzazione della funzione $f(x)$.

Esercizio 1.14 *Disegnare e descrivere analiticamente la funzione* $f(0) = 0$, *e* $f(x) = 180 + 2x$ *per* $0 < x \leq 250$.

1.2.9 Vincoli di soglia

Negli esempi precedenti, abbiamo visto come variabili logiche e quantitative possano essere utilizzate negli stessi vincoli. Si trattava comunque di *variabili decisionali*, ossia che rappresentano decisioni effettive del problema, sia pure di "tipo" diverso. In generale, tutte le variabili – quantitative o logiche – del modello sono variabili decisionali. Può in alcuni casi far comodo, però, distinguere tra le variabili decisionali vere e proprie e le *variabili ausiliarie*, quelle che sono introdotte nel modello col solo scopo di permettere la formulazione di qualche specifica condizione. Ad esempio, possono essere considerate ausiliarie le variabili y_j nel problema (MCMS) (si veda 1.2.4.2), in quanto le decisioni fondamentali (quali lavori assegnare a quali macchine, e, di conseguenza, quali macchine vengono utilizzate) sono già rappresentate dalle variabili x_{ij}; le variabili y_j servono solamente ad esprimere la funzione obiettivo.

In molti problemi si ha bisogno di rappresentare dei "valori soglia" mediante variabili e vincoli lineari. Più formalmente, siano $x_1, x_2, \ldots, x_n$, variabili reali; si vogliono definire due variabili l ed u che siano una approssimazione rispettivamente per difetto e per eccesso di ciascuna delle variabili:

$$l \leq \min\{x_i : i = 1, \ldots, n\};$$

$$u \geq \max\{x_i : i = 1, \ldots, n\}.$$

Tali condizioni sono facilmente ottenute mediante:

$$l \leq x_i, \qquad u \geq x_i, \quad i = 1, \ldots, n;$$

infatti, l sarà non superiore ed u sarà non inferiore a ciascuna delle n variabili. Se si massimizza l o se si minimizza u, all'ottimo esse saranno uguali rispettivamente al minimo e al massimo dei valori assumibili dalle n variabili.

Vediamo ora un'applicazione dei vincoli di soglia relativamente ad un altro problema di ordinamento di lavori su macchine.

1.2.9.1 Ordinamento di lavori su macchine: minimizzazione del tempo di completamento

Questo problema è una variante di (MCMS) (si veda 1.2.4.2) in cui il tempo di inizio di ciascun lavoro non è fissato, e può essere deciso senza alcun vincolo. È invece fissato il numero di macchine da utilizzare, e si chiede di completare tutti i lavori nel minor tempo possibile.

Se $N(j)$ è l'insieme dei lavori assegnati alla macchina j, $j = 1, \ldots, m$, allora il tempo di lavoro $D(j)$ della macchina è

$$D(j) = \sum_{i \in N(j)} d_i \ .$$

Il *tempo di completamento* T, da minimizzare, è il massimo dei tempi di lavoro delle macchine

$$T = \max\{D(j) : j = 1, \ldots, m\} \ ,$$

ossia il tempo necessario alla macchina più carica per terminare.

Utilizziamo le stesse variabili x_{ij} utilizzate in (MCMS); useremo i vincoli di semi-assegnamento (1.9), assieme ai vincoli di integralità, per imporre che ciascun lavoro sia eseguito da una ed una sola macchina.

Per formulare la funzione obiettivo, da minimizzare, dobbiamo esprimere il massimo tra m quantità. Per questo utilizziamo la tecnica appena introdotta ed introduciamo una nuova variabile t che rappresenta una approssimazione per eccesso del tempo di completamento:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq t, \quad j = 1, \ldots, m.$$

La formulazione risultante del problema (MMMS, da *Minimal Makespan Machine Scheduling*) è:

$$(\text{MMMS}) \qquad \begin{array}{lll} \min & t & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 & i = 1, \ldots, n \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i x_{ij} \leq t & j = 1, \ldots, m \\ & x_{ij} \in \{0, 1\} & i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Come abbiamo già notato, quando il problema è risolto "all'ottimo" la variabile ausiliaria t fornisce il tempo di completamento e non una sua approssimazione; infatti, se per assurdo si avesse $t > D(j), j = 1, \ldots, m$, si otterrebbe un valore inferiore della funzione obiettivo ponendo $t = \max\{D(j) : j = 1, \ldots, m\}$.

Esercizio 1.15 *Costruire un'istanza del problema (MMMS) con 3 macchine e 7 lavori, definendo le durate di essi; formulare quindi l'istanza, fornire tre soluzioni ammissibili e valutarne il tempo di completamento.*

Esercizio 1.16 *Una ditta di costruzioni edilizie ha deciso di subappaltare n diverse opere ad n diversi artigiani. Ad ogni artigiano $i = 1, \dots, n$ chiede di fornire il costo preventivo c_{ij} che richiede per effettuare l'opera j, per ogni $j = 1, \dots, n$. Si vuole assegnare un'opera a ciascun artigiano in modo che tutte le opere siano effettuate e il costo massimo dei subappalti assegnati sia minimizzato. Formulare il problema.*

Esercizio 1.17 *Si provi ora a massimizzare il costo minimo dei subappalti assegnati.*

Esercizio 1.18 *Si formuli il problema in cui si vuole che la differenza tra il massimo e il minimo costo dei subappalti assegnati sia più piccola possibile.*

Esercizio 1.19 *Siano $a_1, \dots, a_n$ numeri reali positivi. Partizionare tali numeri in due insiemi I e J in modo tale che le somme dei valori assegnati a ciascun sottoinsieme abbiano la minima differenza in valore assoluto.*

1.2.10 Come rappresentare il valore assoluto

Può capitare di dover trattare un vincolo del tipo:

$$|g(x)| \leq b \;, \tag{1.17}$$

dove $g(x)$ è una funzione dell'insieme di variabili x e b è un numero reale positivo. Se $g(x) \geq 0$ allora il vincolo diviene $g(x) \leq b$, mentre se $g(x) < 0$ il vincolo diviene $-g(x) \leq b$. Pertanto, per rappresentare il vincolo (1.17) è sufficiente considerare i seguenti due vincoli:

$$g(x) \leq b; \quad -g(x) \leq b \;.$$

Vediamo ora come trattare una funzione obiettivo espressa mediante un valore assoluto. Si supponga di dover massimizzare $|f(x)|$, con $x \in X$. È sufficiente risolvere i due diversi problemi

$$\max \;\{f(x) : x \in X\},$$

$$\max \;\{-f(x) : x \in X\},$$

e prendere come soluzione quella che fornisce il valore più alto della funzione obiettivo.

Se $f(x)$ è una funzione lineare nella singola variabile x, cioè $f(x) = b+cx$, allora basta sostituire alla $f(x)$ la funzione lineare a tratti

$$g(x) = \begin{cases} -b - cx, & x \leq -b/c, \\ \;\;\, b + cx, & x > -b/c; \end{cases}$$

che può essere trattata con le tecniche che verranno spiegate nel paragrafo 1.2.11.

Esercizio 1.20 *Formulare il problema min*$\{|3 - 4x| : |x| \leq 2\}$.

1.2.10.1 Minima distanza

Dato un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$, si vuole determinare "il più piccolo" elemento di X, ossia l'elemento di X che minimizza una qualche norma. Questo problema ha numerose applicazioni, ad esempio in statistica ed ingegneria. La sua versione decisionale consiste nel determinare se l'insieme X contiene un elemento di norma minore o uguale a k, cioè se la sfera (nella norma prescelta) avente centro nell'origine e raggio k ha intersezione non vuota con X; un caso particolare molto rilevante è quello in cui $k = 0$, cioè si vuole determinare se X contiene l'origine.

Le norme più comunemente usate sono

$$L_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ ,$$

$$L_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \ ,$$

$$L_\infty(x) = \max \ \{|x_i| : i = 1, \ldots, n\} \ .$$

Nel caso in cui X sia un poliedro convesso, ossia

$$X = \{x : Ax \leq b\} \ ,$$

il problema di minima distanza corrispondente alle L_1 o L_∞ è un problema di *PL*. Infatti, il problema di minima distanza può essere scritto nei due casi come

$$(PMD_1) \qquad \begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{n} v_i \\ & -v_i \leq x_i \leq v_i \quad i = 1, \ldots, n \\ & Ax \leq b \end{array}$$

$$(PMD_\infty) \qquad \begin{array}{ll} \min & v \\ & -v \leq x_i \leq v \quad i = 1, \ldots, n \\ & Ax \leq b \end{array}$$

1.2.11 Funzioni lineari a tratti

Consideriamo la seguente funzione $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} b_1 + c_1 x & \text{se } x \in [a_1, a_2], \\ b_2 + c_2 x & \text{se } x \in (a_2, a_3]. \end{cases}$$

dove assumiamo

$$b_2 + c_2 a_2 \geq b_1 + c_1 a_2. \tag{1.18}$$

La funzione $f(x)$ è definita nell'intervallo $[a_1, a_3]$ ed è la composizione di due funzioni lineari definite nei due sottointervalli $[a_1, a_2]$ e $(a_2, a_3]$ (si veda un esempio in figura 1.7). Il caso precedente della funzione con carico fisso può essere visto come un caso particolare, in cui il primo intervallo si riduce ad un unico punto.

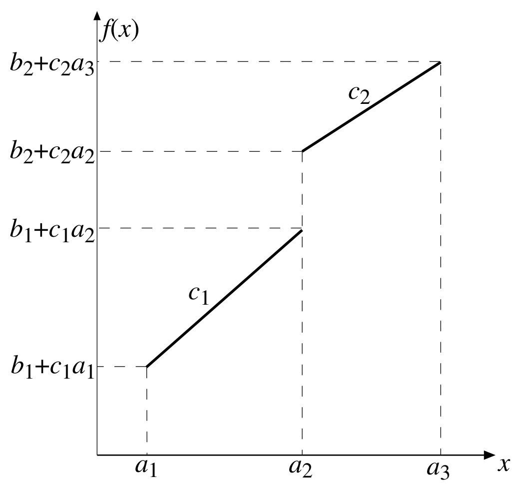

Figura 1.7: Una funzione lineare a due tratti

Introduciamo due variabili booleane y_1 e y_2 con il seguente significato:

$$y_1 = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [a_1, a_2], \\ 0, & \text{altrimenti}, \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in (a_2, a_3], \\ 0, & \text{altrimenti}. \end{cases}$$

Dovendo x appartenere a uno ed uno solo dei due sottointervalli, occorre aggiungere il vincolo

$$y_1 + y_2 = 1$$

ai vincoli $y_1, y_2 \in \{0, 1\}$; alternativamente, si potrebbe sostituire $1 - y_1$ a y_2 (le due variabili sono complementari).

Si noti che se $x \in [a_1, a_2]$ possiamo porre $x = a_1 + z_1$, dove z_1 $(= x - a_1)$ non è altro che la porzione di valore di x che supera a_1, pertanto il suo valore è limitato dalle disuguaglianze $0 \leq z_1 \leq a_2 - a_1$. Analogamente, se $x \in (a_2, a_3]$, poniamo $x = a_2 + z_2$, dove z_2 ha un significato analogo a quello di z_1, con $0 < z_2 \leq a_3 - a_2$. Considerato il significato delle variabili booleane y_1 e y_2, possiamo scrivere:

$$x = a_1 y_1 + z_1 + a_2 y_2 + z_2,$$

purché siano rispettati i seguenti vincoli:

$$\begin{array}{l} 0 \leq z_1 \leq (a_2 - a_1) y_1 \\ 0 \leq z_2 \leq (a_3 - a_2) y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \in \{0, 1\} \end{array} \tag{1.19}$$

I vincoli (1.19) impongono che solo una delle due variabili z_1 e z_2 possa avere valore non nullo. Si noti che la condizione $z_2 \geq 0$ permette di definire il valore $x = a_2$ anche nel caso in cui $y_2 = 1$; torneremo su questo caso in seguito.

Sostituiamo alla funzione $f(x)$ la seguente funzione:

$$\begin{aligned} g(z_1, z_2, y_1, y_2) \quad &= b_1 y_1 + c_1(a_1 y_1 + z_1) + b_2 y_2 + c_2(a_2 y_2 + z_2) \\ &= (b_1 + c_1 a_1) y_1 + c_1 z_1 + (b_2 + c_2 a_2) y_2 + c_2 z_2. \end{aligned}$$

con le variabili soggette ai vincoli (1.19). Abbiamo espresso una funzione non lineare $f(x)$ come una funzione lineare $g(z_1, z_2, y_1, y_2)$ definita su un opportuno insieme.

Discutiamo ora l'ambiguità della funzione $g(z_1, z_2, y_1, y_2)$ nel punto a_2: $x = a_2$ può essere espresso sia ponendo $z_1 = a_2 - a_1, y_1 = 1, z_2 = y_2 = 0$ che ponendo $z_1 = y_1 = z_2 = 0, y_2 = 1$; chiaramente solo il primo dei due casi è accettabile. Analogamente a quanto osservato per la funzione con carico fisso nel paragrafo precedente, se si vuole minimizzare $f(x)$, per l'assunzione (1.18) si ha

$$g(0, 0, 0, 1) = b_2 + c_2 a_2 \geq b_1 + c_1 a_2 = g(a_2 - a_1, 0, 1, 0),$$

e quindi, $x = a_2$ fosse la soluzione ottima, la soluzione $z_1 = a_2 - a_1, y_1 = 1, z_2 = y_2 = 0$ risulterebbe comunque ottima, nonostante l'ambiguità.

Si noti che, se $f(x)$ fosse continua in $[a_1, a_3]$, cioè se fosse $b_2 + c_2 a_2 = b_1 + c_1 a_2$, allora non sarebbe scorretto considerare il valore a_2 in entrambi i casi (cioè il secondo intervallo sarebbe $[a_2, a_3]$); non essendovi ambiguità sul valore di $f(x)$ in a_2, in questo caso la funzione $g(z_1, z_2, y_1, y_2)$ può essere anche massimizzata.

La trasformazione presentata può essere generalizzata al caso di funzioni lineari a tratti definite su più di due intervalli:

$$f(x) = \begin{cases} b_1 + c_1 x, & \text{se } x \in [a_1, a_2], \\ b_2 + c_2 x, & \text{se } x \in (a_2, a_3], \\ \quad\vdots & \\ b_n + c_n x, & \text{se } x \in (a_n, a_{n+1}], \end{cases}$$

con condizioni analoghe a (1.18) nei punti di discontinuità.

La funzione in sostituzione di $f(x)$ è

$$g(z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n}(b_i + c_i a_i)y_i + \sum_{i=1}^{n} c_i z_i \ ,$$

con le variabili soggette ai vincoli:

$$\begin{array}{ll} 0 \leq z_i \leq (a_{i+1} - a_i)y_i, & i = 1, \ldots, n, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i = 1 & \\ y_i \in \{0, 1\}, & i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Il valore della variabile x è dato da:

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i \ .$$

Esercizio 1.21 *Sia data la seguente funzione:*

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & se\ x \in [0, 2], \\ 8 - x, & se\ x \in (2, 5], \\ 3, & se\ x \in (5, 6], \\ 2 + x/2, & se\ x \in (6, 10]. \end{cases}$$

Disegnare $f(x)$ e fornire la formulazione analitica del corrispondente problema di minimizzazione di f.

La necessità di utilizzare variabili logiche per rappresentare le funzioni lineari a tratti degli esempi precedenti deriva dalla loro *non convessità*; la formulazione "trasferisce" la non convessità del problema dalla funzione obiettivo all'insieme ammissibile per mezzo delle variabili a valori interi. Questo non è necessario qualora la funzione sia convessa, come quella mostrata in figura 1.8. Affinché ciò accada, devono essere verificate due condizioni:

- f deve essere continua, ossia $b_{i+1} + c_{i+1}a_{i+1} = b_i + c_i a_{i+1}$ per $i = 1, \ldots, n-1$;
- la derivata di f (nei tratti lineari) deve essere nondecrescente, ossia $c_{i+1} \geq c_i$ per $i = 1, \ldots, n-1$.

In questo caso, la minimizzazione di $f(x)$ può essere equivalentemente espressa mediante la minimizzazione di

$$g(z_1, \ldots, z_n) = b_1 + c_1 a_1 + \sum_{i=1}^{n} c_i z_i$$

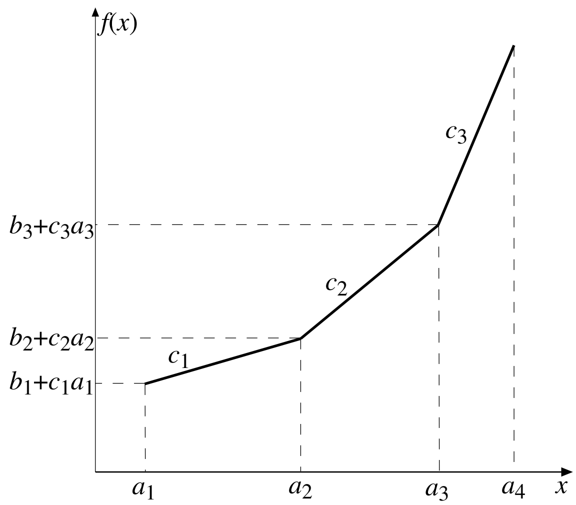

Figura 1.8: Una funzione lineare a tratti e convessa

soggetta ai vincoli

$$0 \leq z_i \leq a_{i+1} - a_i, \quad i = 1, \ldots, n;$$

il valore della variabile x è dato da

$$x = a_1 + \sum_{i=1}^{n} z_i \ .$$

Infatti, se all'ottimo la variabile originaria x deve avere il valore $\bar{x}$, tale valore dovrà essere "costruito" aumentando il valore di alcune delle variabili z_i finché la loro somma non dia $\bar{x}-a_1$. Ma siccome la derivata della funzione è non decrescente, è chiaramente conveniente far crescere prima il valore della variabili z_i di indice più basso; in altri termini, in una soluzione ottima del problema si avrà certamente che

$$\begin{array}{rcll} z_i & = & a_{i+1} - a_i, & \forall i < h, \\ z_h & = & \bar{x} - a_h, & \\ z_i & = & 0, & \forall i > h, \end{array}$$

dove h è il più piccolo indice tale che $\bar{x} \geq a_h$. Si noti che questa proprietà non vale nel caso in cui f non sia convessa, o nel caso in cui venga massimizzata; una formulazione senza variabili logiche, analoga a questa, è possibile per la massimizzazione – ma non per la minimizzazione – di funzioni lineari a tratti *concave*, ossia la cui derivata sia non crescente.

1.2.12 Vincoli disgiuntivi

Come abbiamo visto, nei modelli di Programmazione Lineare (Intera) si hanno un numero finito di vincoli lineari del tipo

$$A_i x \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1.20}$$

che individuano un poliedro convesso. Ad esempio, l'insieme di vincoli

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & & & \leq & 3 \\ & & x_2 & \leq & 1 \\ x_1 & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

definisce il poliedro di vertici A, D, G, C in figura 1.9.

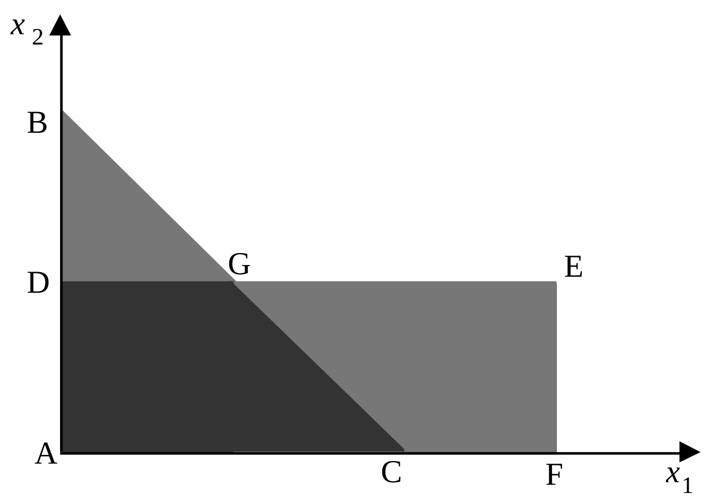

Figura 1.9:

Supponiamo ora che la regione ammissibile che si vuole rappresentare sia tutta quella grigia: si tratta di una regione non convessa, che può essere rappresentata come l'unione (invece dell'intersezione) di due regioni (poliedri), quella definita dal primo vincolo e da quelli di non negatività (il triangolo di vertici A, B e C) e quella definita dal secondo e dal terzo vincolo e, di nuovo, dai vincoli di non negatività (il rettangolo A, D, E e F). Anche qui, come in casi precedenti, si presenta una scelta fra due alternative: la soluzione che cerchiamo appartiene *o* al primo poliedro, *oppure* al secondo. Si parla in questo caso di *vincoli disgiuntivi* perché vogliamo che la soluzione soddisfi (almeno) uno fra due insiemi di vincoli. Per rappresentare vincoli di questo tipo è naturale introdurre due variabili logiche y_1 ed y_2, con la convenzione che $y_1 = 0$ significa che x appartiene al primo insieme e $y_2 = 0$ significa che

x appartiene al secondo insieme. Possiamo quindi rappresentare l'insieme ammissibile per mezzo del sistema di vincoli

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & +x_2 & -M_1 y_1 & & \leq & 2 \\
x_1 & & & -M_2 y_2 & \leq & 3 \\
 & x_2 & & -M_2 y_2 & \leq & 1 \\
x_1 & & & & \geq & 0 \\
 & x_2 & & & \geq & 0 \\
 & & y_1 & +y_2 & \leq & 1 \\
 & & y_1, & y_2 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

purché M_1 ed M_2 siano numeri "sufficientemente grandi". In particolare, si richiede che M_1 renda *ridondante* il primo vincolo quando $y_1 = 1$, ossia che il vincolo

$$x_1 + x_2 \leq 2 + M_1$$

sia soddisfatto da tutti i punti che soddisfano tutti gli altri vincoli (un vincolo è ridondante quando la sua eliminazione non cambia l'insieme ammissibile del problema). Analogamente, M_2 deve essere scelto in modo tale da rendere ridondanti il secondo ed il terzo vincolo quando $y_2 = 1$. Si può facilmente verificare che, in questo caso specifico, è sufficiente porre $M_1 = 2$ e $M_2 = 1$.

Si noti che il vincolo $y_1 + y_2 \leq 1$ assicura che al più una delle variabili abbia valore 1, ossia che almeno uno dei due insiemi di vincoli sia soddisfatto.

Più in generale, consideriamo il caso in cui si abbiamo gli m vincoli (1.20), e che $S_1, S_2, \ldots, S_p$ siano p sottoinsiemi, non necessariamente disgiunti, dell'insieme $\{1, 2, \ldots, m\}$. Definiamo gli insiemi

$$X_h = \{x : A_i x \leq b_i, i \in S_h\}, \quad h = 1, \ldots, p\ ;$$

cioè, X_h è l'insieme di tutti i punti che soddisfano i vincoli i cui indici sono in S_h.

Consideriamo ora l'insieme $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_p$. Se tutti gli insiemi X_h sono limitati possiamo rappresentare X introducendo p variabili binarie e generalizzando l'idea vista in precedenza per il caso $p = 2$: X è l'insieme di tutti i vettori x che soddisfano i vincoli

$$\begin{array}{cccccccc}
A_i x & -M_1 y_1 & & & & \leq b_i, & i \in S_1 \\
A_i x & & -M_2 y_2 & & & \leq b_i, & i \in S_2 \\
\vdots & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
A_i x & & & & -M_p y_p & \leq b_i, & i \in S_p \\
 & y_1 & +y_2 & \cdots & +y_p & \leq p-1 & \\
 & y_1, & y_2, & \cdots, & y_p & \in \{0,1\} &
\end{array} .$$

Per ogni $h = 1, \ldots, p$, M_h è una costante tale che tutti i vincoli $A_i x \leq b_i + M_h$ per $i \in S_h$ sono ridondanti per tutti gli insiemi S_k,$k \neq h$; una tale costante esiste certamente perché tutti gli insiemi X_k sono limitati.

Esercizio 1.22 *Si proponga una procedura che permetta di determinare un valore opportuno per ciascuna costante M_h (suggerimento: si risolva un numero opportuno di problemi di* PL*).*

Una variante interessante è il caso in cui si vuole che almeno k degli insiemi di vincoli siano soddisfatti (cioè x appartenga all'intersezione di almeno k degli insiemi $X_i, i = 1, \ldots, p$). In questo caso è sufficiente sostituire al vincolo $y_1 + y_2 + \cdots + y_p \leq p - 1$ il nuovo vincolo $y_1 + y_2 + \cdots + y_p \leq p - k$.

Esercizio 1.23 *La casa di produzione di cibi in conserva "Stella" intende immettere sul mercato una nuova linea di preparati per insalate di riso, chiamati "GhiottoRiso", che possono contenere, oltre ad altri prodotti vegetali, anche funghetti rosa (nel seguito 'fr'), cipolline ovali ('co'), peperoncini piccanti ('pp') e crauti indiani ('ci'); di ciascuno di essi si deve decidere la presenza e quantità.*

La divisione marketing della Stella ha definito 6 *diversi standard qualitativi tali che il raggiungimento di ciascuno di essi farà aumentare le vendite del prodotto. Essi sono espressi come:*

$$\begin{array}{rrrrl}
2x_{fr} & +4x_{co} & +x_{pp} & +3x_{ci} & \geq 150, \\
x_{fr} & +2x_{co} & +5x_{pp} & +2x_{ci} & \geq 95, \\
3x_{fr} & +x_{co} & +2x_{pp} & +x_{ci} & \geq 80, \\
5x_{fr} & +3x_{co} & +3x_{pp} & +4x_{ci} & \geq 200, \\
x_{fr} & +5x_{co} & +2x_{pp} & +x_{ci} & \geq 70, \\
4x_{fr} & +x_{co} & +x_{pp} & +4x_{ci} & \geq 100,
\end{array}$$

dove le variabili x rappresentano le quantità in grammi dei quattro prodotti che si intende mettere nel GhiottoRiso. Inoltre, dalle ultime indagini svolte sull'apprezzamento presso la clientela dei prodotti delle ditte concorrenti, si è riusciti a prevedere che, se si riescono a soddisfare almeno 3 *dei* 6 *standard di qualità, l'intera produzione sarà assorbita dal mercato.*

Il costo al grammo dei quattro prodotti in questione è $c_{fr} = 12, c_{co} = 6, c_{pp} = 15, c_{ci} = 5$. Infine, per ciascuno di essi, la massima quantità in grammi che si può immettere nel GhiottoRiso è 15 *grammi.*

Si vuole ottenere la composizione ottimale di GhiottoRiso, cioè quella che rispetti le indicazioni date e che abbia il minimo costo; formulare il problema e determinare una soluzione ammissibile.

1.2.13 Un esempio di formulazione e alcuni esercizi

Concludiamo questa parte dedicata alle tecniche di modellazione con un esempio nel quale si utilizzano alcune delle tecniche precedentemente illustrate; l'uso delle tecniche potrà poi essere autonomamente sperimentato svolgendo gli esercizi proposti alla fine del paragrafo.

1.2.13.1 Dislocazione ottima di impianti

La società informatica MilanNet ha deciso di aprire nel territorio pisano sino a n possibili uffici di assistenza ai suoi m clienti. Per ogni sito $i = 1, \ldots, n$ si conosce il costo d_i di installazione e il numero massimo u_i di clienti che può assistere qualora sia attivato; inoltre, per ogni sito $i = 1, \ldots, n$ si conosce il costo c_{ij} di gestire il cliente $j = 1, \ldots, m$ presso tale centro.

Si vuole decidere in quali delle n località aprire gli uffici di assistenza e, per ciascuno di essi l'insieme dei clienti assegnati, in modo tale che ogni cliente sia assegnato ad uno ed un solo ufficio di assistenza e che il costo complessivo (di installazione e gestione) sia minimo.

Per formulare tale problema occorre introdurre due insiemi di variabili binarie: le variabili y_i, $i = 1, \ldots, n$, per rappresentare la scelta relativa agli uffici da aprire, e le variabili x_{ij}, $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$, per assegnare i clienti agli uffici.

La funzione obiettivo, da minimizzare, che include sia i costi di gestione che quelli di installazione è

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} d_i y_i \ .$$

I vincoli di semiassegnamento garantiscono che ogni cliente sia assegnato ad uno ed un solo ufficio:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, \ldots, m \ .$$

Dobbiamo poi aggiungere sia i vincoli sul numero massimo di clienti per ufficio

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq u_i, \quad i = 1, \ldots, n \ , \tag{1.21}$$

sia quelli che garantiscono che i clienti siano assegnati ad uffici di cui sia stata decisa la costruzione:

$$x_{ij} \leq y_i, \quad j = 1, \ldots, m, \ i = 1, \ldots, n \ . \tag{1.22}$$

Questi ultimi esprimono l'implicazione $x_{ij} > 0 \Rightarrow y_j = 1$. Per evitare di usare mn vincoli, si può imporre che la somma delle x_{ij}, cioè il numero di clienti assegnati al sito i sia nulla quando $y_i = 0$ e possa assumere un valore non superiore a u_i quando $y_i = 1, i = 1, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq u_i y_i, \quad i = 1, \ldots, n \ .$$

Osserviamo che il vincolo relativo all'ufficio i, $i = 1, \ldots, n$, implica sia il corrispondente vincolo (1.21) che i corrispondenti vincoli (1.22). Il problema può quindi essere formulato come

$$
\begin{array}{llllll}
\min & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} & +\sum_{i=1}^{n} d_i y_i & & & \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} & & = 1 & j = 1, \ldots, m & i = 1, \ldots, n \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} & -u_i y_i & \leq 0 & & i = 1, \ldots, n \\
& & y_i \in \{0, 1\} & & & i = 1, \ldots, n \\
& x_{ij} \in \{0, 1\} & & & j = 1, \ldots, m & i = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Esercizio 1.24 *Formulare un problema di installazione ottima di al più 4 impianti con 11 clienti, dando anche i costi di installazione e di gestione e le capacità degli impianti.*

1.2.13.2 Esercizi di modellazione

Esercizio 1.25 *La Fintus produce tre tipi di patatine surgelate, denominati A, B e C. La compagnia acquista patate di due tipi diversi, denominati P_1 e P_2. I diversi tipi di prodotto usano parti diverse della patata originaria, per cui 1Kg di patate acquistato determina la produzione di una certa quantità di tutti e tre i prodotti. I rendimenti dei due tipi di patata sono diversi, come indicato nella seguente tabella:*

patata/tipo	*A*	*B*	*C*
P_1	*.2*	*.2*	*.3*
P_2	*.3*	*.1*	*.3*

Il profitto della Fintus è di .03 Euro al Kg per le patate P_1 e di .025 Euro al Kg per le patate P_2: la Fintus intende produrre non più di 6.000 Kg di A, 4.000 Kg di B e 8.000 kg di C, massimizzando il profitto. Formulare come PL *il problema di ottimizzazione corrispondente.*

Esercizio 1.26 *L'azienda Caramelli produce un olio speciale per cosmetici, ottenuto dalla raffinazione e miscelazione di oli. Gli oli si dividono in due categorie, oli vegetali ed oli non vegetali. Sono disponibili due diversi oli vegetali, che indichiamo con V_1 e V_2, e tre diversi oli non vegetali che indichiamo con N_1, N_2 e N_3. I costi (Euro/tonnellata) e la densità degli oli sono i seguenti:*

	V_1	V_2	N_1	N_2	N_3
Costo	*110*	*120*	*130*	*110*	*115*
Densità	*8.8*	*6.1*	*2.0*	*4.2*	*5.0*

Gli oli vegetali e quelli non vegetali richiedono differenti linee di produzione per la raffinazione. In ogni mese non è possibile raffinare più di 200 tonnellate di olio vegetale e 250 tonnellate di olio non vegetale. Non vi è perdita di peso nel processo di raffinamento ed il costo di tale processo può essere ignorato. Vi è invece una restrizione tecnologica sulla densità del prodotto finale: nell'unità di misura opportuna, questa deve essere compresa tra 3 e 6. Si assume che la densità degli oli si misceli nel prodotto finale in modo lineare. Il prodotto finale sarà venduto a 150 Euro/tonnellata. Formulare come PL *il problema di produrre il bene massimizzando il profitto.*

Esercizio 1.27 *Un'industria dolciaria produce 3 diversi tipi di dolci: A, B, C. Si deve stabilire il piano di produzione giornaliero dell'industria, avente una capacità produttiva massima di* 10.000 *dolci al giorno, in modo che la produzione di A non ecceda il 50% della produzione globale giornaliera, e che la produzione di C sia uguale al più al 25% della produzione di B. Sapendo che il guadagno garantito dalla produzione di un dolce di tipo A, B e C è rispettivamente di* 0.2 *Euro,* 0.1 *Euro e* 0.4 *Euro, si vuole individuare un piano di produzione che massimizzi il guadagno. Si formuli il problema come* PL*.*

Esercizio 1.28 *Un'impresa ha a disposizione tre procedimenti differenti, chiamati P_1, P_2 e P_3, per la produzione di un certo bene. Per produrre una unità di tale bene sono necessarie lavorazioni su tre macchine diverse, chiamate A, B e C. I tempi di lavorazione per ogni macchina necessario a produrre un'unità di bene dipende dal procedimento usato, come mostrato nella tabella seguente:*

procedimento/macchina	A	B	C
P_1	*2*	*4*	*3*
P_2	*1*	*2*	*4*
P_3	*3*	*3*	*2*

Ogni macchina è disponibile per 50 unità di tempo. Il profitto per la vendita di un'unità di bene dipende dal procedimento usato: è 15 *se si è usato il procedimento P_1,* 18 *se si è usato P_2 e* 10 *se si è usato P_3 (in Euro). Formulare come* PL *il problema di minimizzare il numero di unità di tempo di impiego della macchina B, con il vincolo che il profitto sia almeno pari a* 200*.*

Esercizio 1.29 *Il direttore amministrativo dell'ospedale Santa Cara deve stabilire i turni ospedalieri delle ostetriche, in modo da garantire un minimo numero di ostetriche presenti in ogni turno (indicato nella tabella). Il direttore vuole utilizzare il minor numero totale di ostetriche, tenendo conto che le ostetriche che si recano in reparto per uno dei primi cinque turni sono obbligate a lavorare per 8 ore consecutive (due turni consecutivi), mentre quelle impiegate nell'ultimo turno (turno 6) lavorano solo 4 ore. Si formuli il problema come* PLI*.*

Turno	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Orario	*6 - 10*	*10 - 14*	*14 - 18*	*18 - 22*	*22 - 2*	*2 - 6*
N. ostetriche	*70*	*80*	*50*	*60*	*40*	*30*

Esercizio 1.30 *Sia data la matrice* 3×3 *di numeri reali in figura, in cui sono anche indicate le somme degli elementi di ogni riga e di ogni colonna. Si vuole arrotondare ogni elemento della matrice o alla sua parte intera inferiore, oppure alla sua parte intera superiore. Lo stesso procedimento di arrotondamento deve essere applicato alla somma degli elementi di ogni riga ed alla somma degli elementi di ogni colonna. Si vogliono eseguire tali operazioni di arrotondamento in modo che, nel problema trasformato, la somma degli elementi arrotondati in ogni riga (colonna) sia uguale alla rispettiva somma di riga (colonna) arrotondata. Si formuli il problema come* PLI.

3.1	*6.8*	*7.3*	*17.2*
9.6	*2.4*	*0.7*	*12.7*
3.6	*1.2*	*6.5*	*11.3*
16.3	*10.4*	*14.5*	*somme*

Esercizio 1.31 *Un villaggio ha 7 abitanti* $\{a_1, \ldots, a_7\}$, *4 clubs politici* $\{C_1, \ldots, C_4\}$, *e 3 partiti politici* $\{P_1, \ldots, P_3\}$. *Ogni abitante è membro di almeno un club, ed è iscritto ad un solo partito politico. Più precisamente, i clubs hanno i seguenti membri:* $C_1 = \{a_1, a_2\}$; $C_2 = \{a_2, a_3, a_4\}$; $C_3 = \{a_4, a_5\}$; $C_4 = \{a_4, a_5, a_6, a_7\}$, *mentre i partiti hanno i seguenti iscritti:* $P_1 = \{a_1, a_2\}$; $P_2 = \{a_3, a_4\}$; $P_3 = \{a_5, a_6, a_7\}$. *Ogni club deve nominare uno dei suoi membri come rappresentante al consiglio del villaggio, costituito da 4 membri. Formulare il problema di decidere se sia possibile costituire un consiglio del villaggio con la proprietà che al più un membro appartenga a* P_2 *e al più un membro appartenga a* P_3.

Esercizio 1.32 *Il C.T. Tramattoni, dopo la clamorosa esclusione dell'Italia dalla Coppa del Tondo, decide di rivolgersi ad un esperto di Ricerca Operativa per le prossime partite per i Campionati della Moneta Unica. Per le partite di qualificazione ha già deciso di avvalersi di una rosa di* n *giocatori; di ciascun giocatore* i, $i = 1, \ldots, n$, *si conosce la bravura* b_i *e il ruolo che può ricoprire in campo (uno e uno solo per giocatore). Gli* n *giocatori sono partizionati negli insiemi* P *dei portieri,* D *dei difensori,* C *dei centrocampisti e* A *degli attaccanti. Si dovrà far giocare almeno un giocatore per ciascun ruolo ma non più di 1 portiere, 6 difensori, 5 centrocampisti e 4 attaccanti. Tramattoni fornisce all'esperto anche la lista* L, $|L| = m$, *delle coppie di giocatori che non potranno giocare assieme per incompatibilità tattiche e/o caratteriali. Egli richiede all'esperto di aiutarlo a definire una formazione di 11 giocatori che rispetti sia le limitazioni sui ruoli sia le incompatibilità e che massimizzi la bravura complessiva, data dalla somma* *delle bravure dei singoli giocatori. Svolgere il ruolo dell'esperto di Ricerca Operativa formulando come* PLI *il problema per Tramattoni.*

Esercizio 1.33 *La commissione arbitri di calcio ha deciso di formare le terne (un arbitro più due guardialinee) in modo automatico per eliminare sospetti di "combine". Inoltre, per rispettare la legge sulle pari opportunità, la commissione ha deciso che ogni coppia di guardialinee sia formata da un uomo e una donna. Per le n partite in programma domenica prossima sono a disposizione a arbitri (maschi e femmine), m guardialinee maschi e f guardialinee femmine (con $a > n$, $m > n$, $f > n$). Il valore p_i indica la qualità (esperienza, capacità, ...) dell'arbitro o del/della guardialinee i; il valore di una terna è la somma dei valori delle tre persone che formano la terna stessa. Per evitare che si formino terne troppo difformi tra loro, la commissione decide di formare n terne in modo che sia minima la differenza tra il massimo e il minimo valore delle terne. Formulare il problema della commissione come problema di* PLI.

Esercizio 1.34 *Il partito del Limone si sta attivando per le elezioni europee e, per formare la lista dei candidati, ha a disposizione n volontari. Dopo un rapido sondaggio tra i limoncini, si valuta che il volontario i può ricevere c_i preferenze, $i = 1, \ldots, n$; inoltre il Capolimone conosce l'insieme $D(i)$ dei volontari in grado di collaborare col volontario i, $i = 1, \ldots, n$. Dall'insieme dei volontari si vuole selezionare una lista L di candidati tale che ognuno sia in grado di collaborare con gli altri e che la somma delle preferenze ricevute sia massima. Formulare il problema in termini di* PLI.

Esercizio 1.35 *Giro e Tond, i due maggiori produttori di automobili europei, hanno deciso di effettuare una fusione. Ciò comporta una gestione comune degli impianti delle due aziende, che dovranno produrre gli stessi modelli. Indichiamo con I e J rispettivamente gli insiemi degli impianti della Giro e della Tond, con K l'insieme dei mercati in cui dovrà operare la nuova azienda, la GiroTond, con b_k, $k \in K$, la domanda del k-esimo mercato e con c_{ik}, $i \in I \cup J$, $k \in K$, il costo unitario di trasporto dall'impianto i al mercato k. Si vuole assegnare ogni mercato ad uno ed uno solo degli impianti, chiudendo gli impianti in eccesso. Formulare, come problema di* PLI*, il problema dell'assegnamento degli impianti ai mercati, con l'obiettivo di minimizzare i costi di trasporto ed il vincolo che almeno il 50% degli impianti di ciascuno dei due produttori rimanga aperto.*

Riferimenti Bibliografici

F.S. Hillier, G.J. Lieberman, "**Introduzione alla ricerca operativa**", Franco Angeli, Milano (1999).

F. Maffioli, "**Elementi di programmmazione matematica**", Casa Editrice Ambrosiana, Milano (2000).

A. Sassano, "**Modelli e algoritmi della ricerca operativa**", Franco Angeli, Milano (1999).

C. Vercellis, "**Modelli e decisioni**", Progetto Leonardo, Bologna (1997).