Capitolo 2

Equazioni non lineari

2.1 Richiami di teoria

Prerequisiti: teorema di Gauss, nozioni elementari di calcolo differenziale.

In generale, per risolvere una equazione della forma $f(x) = 0$ dove f è una qualsiasi funzione almeno continua in un intervallo $[a, b]$, non sono disponibili formule risolutive, per cui si deve ricorrere a metodi iterativi che consentano di approssimare le soluzioni con una precisione prestabilita. È opportuno, magari ricorrendo a tecniche grafiche, farsi prima un'idea dell'andamento della funzione $f(x)$, per determinare il numero delle soluzioni e separare ogni soluzione.

Metodo di bisezione

• Se $f(x)$ è continua in un intervallo $[a, b]$ e assume valori di segno opposto agli estremi, si può applicare il metodo di bisezione. Si pone $a_0 = a$ e $b_0 = b$. Per $i = 0, 1, \ldots$ si calcolano

$$x_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2} \quad \text{e} \quad f(x_{i+1});$$

se $\quad f(a_i)f(x_{i+1}) < 0, \quad$ si pone $a_{i+1} = a_i$ e $b_{i+1} = x_{i+1}$;

se $\quad f(a_i)f(x_{i+1}) > 0, \quad$ si pone $a_{i+1} = x_{i+1}$ e $b_{i+1} = b_i$;

se $\quad f(x_{i+1}) = 0, \quad$ è $\alpha = x_{i+1}$.

Se la condizione $f(x_{i+1}) = 0$ non è mai verificata, il procedimento definisce una successione di intervalli $[a_i, b_i]$ ciascuno contenuto nel precedente e di lunghezza metà. Quindi la successione degli x_i converge ad un punto α che per la continuità della f è soluzione della equazione.

• Come **criterio di arresto** si può imporre la condizione $|b_i - a_i| \le \epsilon$, dove $\epsilon > 0$ è una costante prefissata. Poiché dopo i passi è $|b_i - a_i| = |b - a|/2^i$, la condizione è verificata all'n-esimo passo, dove n è il minimo intero tale che

$$n > \log_2 \frac{|b - a|}{\epsilon}.$$

Metodo delle secanti

• Nel metodo delle secanti il punto x_{i+1} non viene costruito come il punto medio dell'intervallo $[a_i, b_i]$ ma come il punto di intersezione con l'asse x del segmento che unisce i due estremi del grafico della funzione, cioè

$$x_{i+1} = a_i - \frac{f(a_i)(b_i - a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

• A differenza del metodo di bisezione, la successione delle lunghezze degli intervalli $[a_i, b_i]$ in generale non tende a zero, perché da un certo punto in poi uno dei due estremi dell'intervallo a_i oppure b_i rimane invariato. Questo accade se la funzione f è concava o convessa in un intorno della soluzione α. Come condizione di arresto si usa

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \epsilon.$$

• Se f è derivabile due volte con continuità e $f''(x) \neq 0$ in un intervallo $[a, b]$ contenente α, la successione generata dal metodo delle secanti a partire da un punto $x_0 \in [a, b]$ in cui $f(x_0)f''(x_0) < 0$ è monotona convergente ad α.

Metodo delle tangenti

• Se la funzione f è derivabile nell'intervallo $[a, b]$, scelto un punto $x_0 \in [a, b]$ il metodo delle tangenti costruisce la successione

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad \text{per} \quad i = 0, 1, \ldots$$

Ogni passo del metodo richiede quindi due valutazioni di funzione: una della funzione f e una della derivata.

• Per il metodo delle tangenti una buona scelta del punto x_0 è fondamentale. Vale il seguente teorema di convergenza “in grande”:

Sia $f(x)$ derivabile con continuità 2 volte in $[a, b]$, con $f'(x), f''(x) \neq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, escluso al più il punto α. Se $x_0 \in [a, b]$ è tale che $f(x_0)f''(x_0) > 0$, la successione generata dal metodo delle tangenti è monotona convergente ad α.

• Per calcolare la radice n-esima di un numero $k > 0$ si applica il metodo delle tangenti all'equazione $f(x) = x^n - k = 0$. Poiché $f'(x) \neq 0$ e $f''(x) > 0$ per $x > 0$, si sceglie x_0 a destra di $\alpha = \sqrt[n]{k}$ e si costruisce la successione

$$x_{i+1} = \frac{1}{n}\left[(n-1)x_i + \frac{k}{x_i^{n-1}}\right],$$

che converge ad α in modo monotono decrescente.

• Una variante del metodo delle tangenti è il metodo delle **corde** che calcola ad ogni iterazione il valore

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{m},$$

dove $m \neq 0$ è una costante scelta opportunamente, in relazione ai valori assunti da $f'(x)$ in un intorno di α.

Metodo di iterazione funzionale

• Data una funzione continua $g(x)$, sia x_i la successione generata dal metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

Se la successione è convergente, posto $\alpha = \lim_{i\to\infty} x_i$, risulta

$$\alpha = \lim_{i\to\infty} x_{i+1} = \lim_{i\to\infty} g(x_i) = g(\lim_{i\to\infty} x_i) = g(\alpha).$$

Quindi α è un punto fisso della $g(x)$, cioè è soluzione dell'equazione $x = g(x)$.

• Teorema (del punto fisso): Sia α punto fisso di $g(x)$. Se in un intorno S circolare e chiuso di α la $g(x)$ è derivabile con continuità e $|g'(x)| < 1$, allora comunque si scelga x_0 in S, ogni $x_i \in S$ e $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \alpha$.

Se $0 < g'(x) < 1$ e $x_0 < \alpha$, la successione x_i è monotona crescente,

se $0 < g'(x) < 1$ e $x_0 > \alpha$, la successione x_i è monotona decrescente,

se $-1 < g'(x) < 0$, la successione x_i è alternata, cioè ha elementi alternativamente maggiori e minori di α.

• In pratica si verifica se la condizione vale in un intervallo chiuso $[a, b]$ contenente α nella sua parte interna. Se $0 < g'(x) < 1$ si può scegliere come x_0 indifferentemente uno dei due estremi. Se $-1 < g'(x) < 0$ si dovrebbe scegliere come x_0 l'estremo dell'intervallo più vicino ad α.

• Un metodo iterativo si dice **(localmente) convergente** ad α se esiste un intorno circolare di α tale che tutte le successioni costruite con il metodo a partire da punti dell'intorno convergono ad α. In tal caso si dice che α è un punto attrattivo per la funzione $g(x)$. Per il teorema questo accade se $|g'(\alpha)| < 1$. Se invece $|g'(\alpha)| > 1$, il punto α è detto repulsivo e il metodo può essere considerato convergente, anche se non è escluso che esistano punti x_0 a partire dai quali accade che $x_i = \alpha$ per qualche indice i.

• La successione è convergente anche se la condizione $|g'(x)| < 1$ vale in tutto l'intorno S eccetto il punto α (per continuità deve essere $|g'(\alpha)| = 1$).

• Come condizione di arresto si usa $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$, dove $\epsilon > 0$ è una tolleranza prefissata. Questa condizione garantisce che $|x_i - \alpha| < \epsilon$ solo se la successione x_i è alternata. Se la successione è monotona, la condizione non è sempre soddisfacente: dipende da quanto $g'(\alpha)$ è vicino ad 1. In alternativa si può usare la condizione $|f(x_i)| < \epsilon$ che però garantisce che $|x_i - \alpha| < \epsilon$ solo se $|f'(x)|$ non è troppo piccolo vicino ad α.

- Nella scelta di ϵ per la condizione di arresto non si deve trascurare la presenza degli errori di arrotondamento che si commettono nel calcolo di $g(x_i)$, per cui se ϵ è troppo piccolo è possibile che la successione effettivamente calcolata $\widetilde{x}_i$ non verifichi mai la condizione.
- Sia x_i una successione convergente ad α e sia $x_i \neq \alpha$ per ogni i. Se esiste un numero reale $p \geq 1$, tale che

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|x_{i+1}-\alpha|}{|x_i-\alpha|^p} = \gamma, \quad \text{con} \begin{cases} 0 < \gamma < 1 & \text{se } p = 1, \\ \\ \gamma > 0 & \text{se } p > 1, \end{cases} \tag{15}$$

si dice che la successione ha **ordine di convergenza** p. La costante γ è detta **fattore** di convergenza.

Se $p = 1$, si dice anche che la convergenza è **lineare**.

Se $p > 1$, si dice anche che la convergenza è **superlineare**.

Se è $\gamma = 1$ quando $p = 1$, si dice che la convergenza è **sublineare**.

- Un metodo iterativo convergente ad α si dice di **ordine** p se tutte le successioni ottenute al variare del punto iniziale in un intorno di α convergono con ordine di convergenza p.
- Se in un intorno S di α è $0 < |g'(\alpha)| < 1$, il metodo iterativo ha convergenza lineare. Se $|g'(\alpha)| = 1$, il metodo, se fosse convergente, avrebbe convergenza sublineare.
- Se in un intorno S di α è

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(p-1)}(\alpha) = 0, \; g^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

per un intero $p \geq 2$, il metodo iterativo ha ordine di convergenza p.

- L'ordine di convergenza p può essere anche un numero non intero se

$$g'(\alpha) = g''(\alpha) = \ldots = g^{(q)}(\alpha) = 0,$$

dove $q = \lfloor p \rfloor$, ma la $g(x)$ non ha la derivata $(q+1)$-esima continua in α.

- Una soluzione α dell'equazione $f(x) = 0$ si dice di **molteplicità** r se esiste finito e non nullo il

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{(x-\alpha)^r}.$$

Se r è intero e la $f(x)$ è derivabile con continuità r volte, α è di molteplicità r se e solo se

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \ldots = f^{(r-1)}(\alpha) = 0, \quad f^{(r)}(\alpha) \neq 0.$$

- Per il metodo delle tangenti vale il seguente teorema di convergenza “in piccolo”:

Sia $\alpha \in [a, b]$ soluzione di $f(x) = 0$, e sia $f'(x) \neq 0$ per $x \in [a, b] - \{\alpha\}$.
a) Se $f(x)$ è derivabile con continuità 2 volte e α ha molteplicità 1, il metodo delle tangenti è convergente con ordine almeno 2. In particolare l'ordine è 2 se $f''(\alpha) \neq 0$.
b) Se $f(x)$ è derivabile con continuità $r \geq 2$ volte e α ha molteplicità r, il metodo delle tangenti ha convergenza lineare.

• In generale il metodo delle secanti e il metodo delle corde sono del primo ordine. Il metodo delle corde è almeno del secondo ordine se $m = f'(\alpha)$.

2.2 Esercizi svolti

2.2.1 È data la funzione

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1.$$

a) Si verifichi che l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni reali $\alpha < \beta < \gamma$.

b) Si applica il metodo di bisezione all'intervallo $[-2, 4]$. Si dica a quale soluzione converge e quante iterazioni è sufficiente effettuare affinchè l'errore assoluto diventi minore di 2^{-20}.

c) Si applica il metodo delle secanti all'intervallo $[-2, 4]$. Si dica a quale soluzione converge e qual è l'andamento della successione che si ottiene.

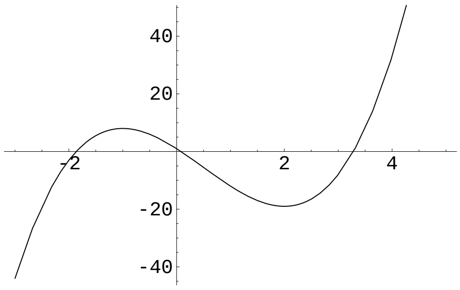
d) Si dica per quali $x_0 \in [-2, -1]$ il metodo delle tangenti risulta convergente.

e) Si dica se la successione generata dal metodo delle tangenti a partire dal punto iniziale $x_0 = 4$ risulta convergente a γ. In caso affermativo si individui l'ordine di convergenza.

f) Si dica se la successione generata dal metodo delle tangenti a partire dal punto iniziale $x_0 = 0$ risulta convergente. (7/11/2001)

Soluzione

a) La funzione $f(x)$ è continua e indefinitamente derivabile su tutto l'asse reale. Inoltre
$$f'(x) = 6(x + 1)(x - 2) \quad \text{e} \quad f''(x) = 6(2x - 1).$$
Quindi vi sono due punti stazionari $x_M = -1$ (di massimo) e $x_m = 2$ (di minimo) e un punto di flesso $x_f = 1/2$. Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(x_M) = 8$, $f(x_m) = -19$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, vi sono in effetti tre soluzioni: $\alpha < x_M$, $x_M < \beta < x_m$ e $\gamma > x_m$. Per determinare tre intervalli disgiunti di separazione delle soluzioni si calcolano alcuni valori della funzione e risulta
$$-2 < \alpha < -1, \qquad 0 < \beta < 1, \qquad 3 < \gamma < 4.$$
Il grafico di $f(x)$ è



b) Poiché $f(-2) < 0$ e $f(4) > 0$, il metodo di bisezione può essere applicato all'intervallo $[-2, 4]$. Posto $a_0 = -2$ e $b_0 = 4$ è $x_1 = (a_0 + b_0)/2 = 1$. Risulta $f(1) < 0$ e quindi $a_1 = 1$ e $b_1 = 4$. Nell'intervallo $[1, 4]$ è contenuta la sola soluzione γ e quindi il metodo convergerà a γ. Dopo i iterazioni si ha

$$|x_i - \gamma| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^i} = \frac{6}{2^i}.$$

Si cerca allora i in modo che

$$\frac{6}{2^i} < 2^{-20},$$

quindi deve essere $i > 20 + \log_2 6$, cioè sono sufficienti 23 iterazioni.

c) All'intervallo $[-2, 4]$ si può applicare anche il metodo delle secanti. Posto $a_0 = -2$ e $b_0 = 4$ è $x_1 = -1.5$. Il metodo risulta quindi convergente ad α, unica soluzione contenuta in $[-2, -1.5]$. Siccome $f''(x)$ non cambia segno in tale intervallo la successione generata è monotona (nel caso specifico decrescente).

d) Risulta convergente per $x_0 \in [-2, -1)$. Infatti per $x \in [-2, \alpha]$ la convergenza è garantita dal teorema di convergenza in grande del metodo delle tangenti. Per $x_0 \in [\alpha, -1)$ dal grafico otteniamo che x_1 cade sicuramente in un intervallo in cui la convergenza è garantita dallo stesso teorema. Per $x_0 = -1$ il metodo non è applicabile in quanto $f'(-1) = 0$.

e) Il metodo risulta localmente convergente per il teorema sulla convergenza locale del metodo delle tangenti. Poiché $f'(\gamma) \neq 0$ e $f''(\gamma) \neq 0$, il metodo risulta di ordine 2.

f) Non è possibile applicare direttamente il teorema di convergenza in grande e dal grafico in questo caso non è possibile trarre delle conclusioni sicure. Tuttavia, applicando il metodo a partire da x_0 otteniamo $x_1 = 1/12$. Risulta allora possibile applicare il teorema di convergenza in grande all'intervallo $(\beta, 1/12]$ per dedurre che il metodo risulta convergente a β.

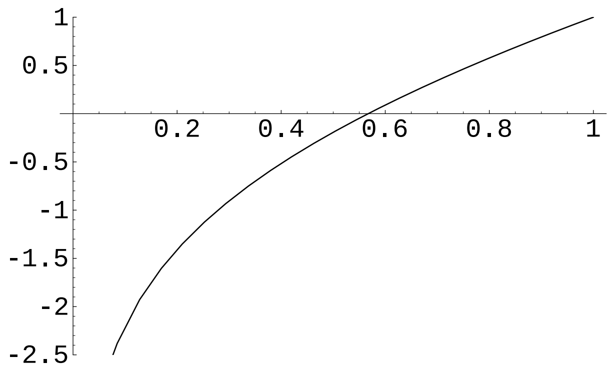
2.2.2 È data la funzione $f(x) = x + \log x$.

a) Si dica quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$.

b) Si dica per quali punti iniziali il metodo delle tangenti risulta convergente e quale è l'ordine di convergenza. (16/7/2002)

Soluzione

a) La funzione è definita per $x > 0$. Poiché $\lim_{x\to 0^+} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} = +\infty$ e $f'(x) > 0$ per $x > 0$, vi è un'unica soluzione α. Inoltre $f(1) = 1$, quindi α appartiene all'intervallo $(0, 1]$.



b) Il teorema di convergenza in grande garantisce la convergenza se $x_0 \in (0, \alpha]$. Se invece x_0 viene scelto a destra di α si osserva che può risultare sia $x_1 \in (0, \alpha)$, caso in cui si ottiene una successione convergente, sia $x_1 \le 0$, caso in cui il metodo non può proseguire. Per distinguere tra i due casi risolviamo l'equazione $x_1 = 0$, cioè

$$x_0 - \frac{x_0 + \log x_0}{1 + 1/x_0} = 0.$$

Si trova subito $x_0 = e$. Quindi si ha convergenza se e solo se $x_0 \in (0, e)$. Poiché la funzione ha derivata prima e seconda continue in un intorno di α ed è $f'(\alpha) \ne 0$ e $f''(\alpha) \ne 0$, il metodo è del secondo ordine.

2.2.3 È data la funzione

$$f(x) = x^3 - 7x + 6.$$

a) Si verifichi che l'equazione $f(x) = 0$ ha tre soluzioni reali $\alpha < \beta < \gamma$.

b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti per l'approssimazione delle tre soluzioni.

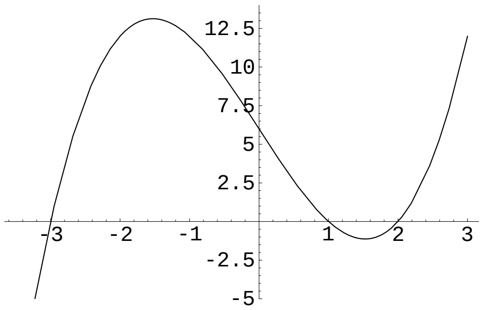
c) Si studi la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = \frac{x^3 + 6}{7},$$

per l'approssimazione delle soluzioni. (6/11/2002)

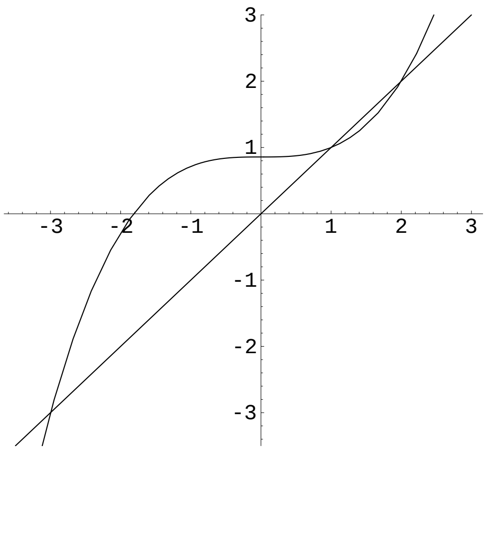
Soluzione

a) Le soluzioni possono essere determinate esplicitamente e risultano $\alpha = -3$, $\beta = 1$ e $\gamma = 2$. La funzione ha massimo relativo in $x_M = -\sqrt{7/3}$ e minimo relativo in $x_m = \sqrt{7/3}$ e $f(x_M) > 0$, $f(x_m) < 0$. Il flesso è in 0. Il grafico risulta



b) Il metodo delle tangenti risulta convergente a α per ogni $x_0 \in (-\infty, x_M)$. Infatti per $x_0 \in (-\infty, \alpha)$ la convergenza è garantita dal teorema di convergenza in grande. Per $x_0 \in (\alpha, x_M)$ dal grafico otteniamo che $x_1 \leq \alpha$ e quindi anche in questo caso vi è convergenza ad α. Il metodo delle tangenti risulta convergente a β per ogni $x_0 \in [0, \beta]$ in quanto sono soddisfatte le ipotesi del teorema di convergenza in grande. Il metodo delle tangenti risulta convergente ad γ per ogni $x_0 \in (x_m, \infty)$. Infatti per $x_0 \in (\gamma, \infty)$ la convergenza è garantita dal teorema di convergenza in grande. Per $x_0 \in (x_m, \gamma)$ dal grafico otteniamo che $x_1 \geq \gamma$ e quindi anche in questo caso vi è convergenza a γ. In tutti i casi l'ordine di convergenza è 2 in quanto $f'(x)$ e $f''(x)$ non si annullano nelle soluzioni.

c) Il grafico di $g(x)$ intersecato con la retta $y = x$ risulta



Poiché le radici sono note, possiamo vedere se c'è convergenza locale calcolando il valore che la derivata prima assume nei punti fissi.

$$g'(x) = \frac{3}{7}\,x^2.$$

Osserviamo che $g'(\alpha)$ e $g'(\gamma)$ risultano maggiori di 1, quindi non abbiamo convergenza locale del metodo alle radici α ed γ. Abbiamo invece convergenza locale a $\beta = 1$ in quanto $g'(\beta) = 3/7 < 1$. Graficamente si osserva che otteniamo una successione convergente a β partendo da un qualsiasi $x_0 \in (\alpha, \gamma)$. Poiché $g'(\beta) \neq 0$ il metodo è del primo ordine.

2.2.4 È data la funzione

$$f(x) = e^{x-1} - 10\,x - 1.$$

a) Si dimostri che $f(x) = 0$ ha due soluzioni reali e si individuino gli intervalli di separazione.

b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti applicato a $f(x) = 0$.

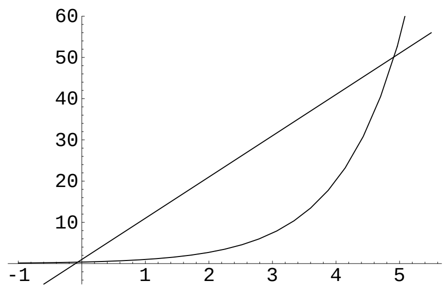
c) Si studi la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = \frac{1}{10}\left(e^{x-1} - 1\right),$$

per l'approssimazione delle due soluzioni. (17/1/2003)

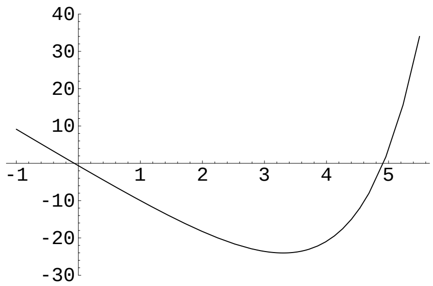
Soluzione

a) Dai grafici delle funzioni e^{x-1} e $10\,x + 1$



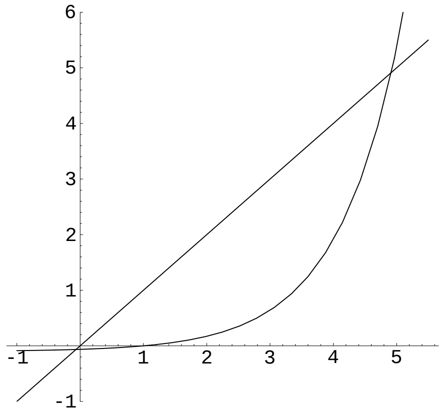
si nota che esistono due soluzioni reali. Calcolando alcuni valori della funzione si trovano gli intervalli di separazione: $\alpha \in [-1, 0]$ e $\beta \in [4, 5]$.

b) La funzione $f(x)$ ha un solo punto di minimo x_m, infatti $f'(x) = e^{x-1} - 10$ e quindi $f'(x) = 0$ per $x = x_m = 1 + \log(10) \sim 3.3$. Inoltre $f''(x) = e^{x-1}$ è sempre positiva. Il grafico della funzione $f(x)$ risulta quindi



Per il teorema di convergenza in grande abbiamo convergenza monotona ad α per ogni $x_0 < \alpha$ e convergenza, sempre monotona, a β per ogni $x_0 > \beta$. In realtà la convergenza ad α è assicurata partendo da un qualsiasi $x_0 < x_m$ perché risulta $x_1 < \alpha$, mentre partendo da $x_0 > x_m$ abbiamo convergenza a β perché risulta $x_1 > \beta$. Poichè le soluzioni hanno molteplicità uno e $f''(x) \neq 0$ per ogni x, l'ordine di convergenza è esattamente 2.

c) I grafici di $y = g(x)$ e della retta $y = x$ risultano



$g'(x) = e^{x-1}/10$ è sempre positiva e risulta $g'(x) < 1$ per $x < x_m$. Osserviamo che $\beta > x_m$, quindi non vi è convergenza locale a β. Per la soluzione α vi è invece convergenza locale. Dal grafico si vede che la convergenza ad α è garantita partendo da un qualsiasi $x_0 < \beta$. L'ordine del metodo è 1.

2.2.5 Si verifichi che, partendo da $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$, i due metodi iterativi

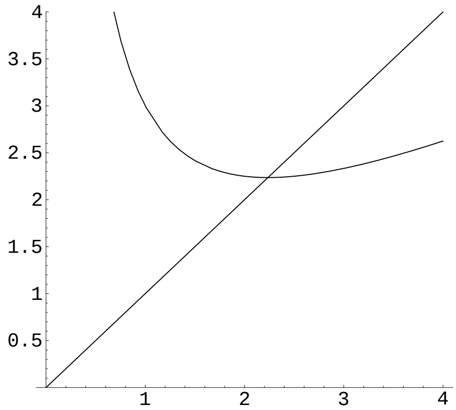
$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{5}{x_i}\right) \quad \text{e} \quad y_{i+1} = \frac{15\, y_i + y_i^3}{3y_i^2 + 5}$$

approssimano entrambi la $\sqrt{5}$. Si studi la convergenza e gli ordini. (16/9/2003)

Soluzione

Il primo metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, con $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$, se converge, converge ad un punto fisso della $g(x)$, cioè ad una soluzione dell'equazione $x = g(x)$.

Si verifica che questa equazione ha due soluzioni $\alpha = \sqrt{5}$ e $\beta = -\sqrt{5}$. Poiché, partendo da un $x_0 > 0$ il metodo può generare solo valori positivi, la convergenza, se c'è, può essere solo alla soluzione positiva. Dai grafici di $y = g(x)$ e della retta $y = x$

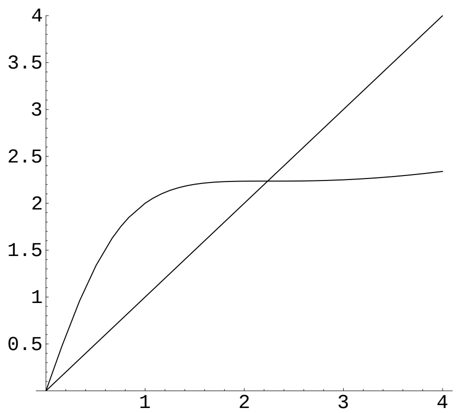


risulta evidente la convergenza ad α. Inoltre, per ogni $x_0 > \alpha$ è $\alpha < x_1 < x_0$, per cui si ottiene una successione monotona convergente ad α per ogni $x_0 > \alpha$. Per $0 < x_0 < \alpha$ si ha $x_1 > \alpha$, e da questo punto in poi si ricade nel caso precedente. Poiché $g'(\alpha) = 0$ e $g''(\alpha) \neq 0$, il metodo è del secondo ordine.

In modo analogo si verifica che il secondo metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, con

$$g(x) = \frac{15\,x + x^3}{3x^2 + 5},$$

se convergente, converge anch'esso ad $\alpha = \sqrt{5}$. Altri punti fissi sono $\beta = -\sqrt{5}$ e $\gamma = 0$. Dai grafici di $y = g(x)$ e della retta $y = x$



risulta evidente la convergenza ad α. Inoltre, per ogni $x_0 > 0$ e $x_0 \neq \alpha$ si ottiene una successione monotona convergente ad α da destra se $x_0 > \alpha$ e da sinistra se $x_0 < \alpha$. Poiché $g'(\alpha) = g''(\alpha) = 0$ e $g'''(\alpha) \neq 0$, il metodo è del terzo ordine.

2.2.6 Si consideri il metodo iterativo

$$x_{i+1} = g(x_i), \quad \text{dove} \quad g(x) = k^2x^3 - 3kx^2 + 3x, \quad \text{dove} \quad k > 0.$$

a) Si determinino le soluzioni dell'equazione $x = g(x)$.

b) Si studi la convergenza del metodo alle diverse soluzioni.

c) Si indichi quale potrebbe essere l'utilizzazione pratica di questo metodo. (7/2/2003)

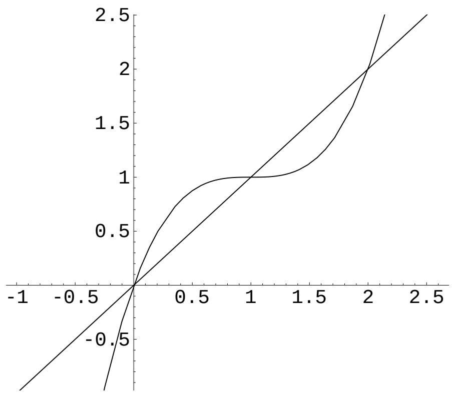
Soluzione

a) Imponendo l'uguaglianza $x = g(x)$ si ottiene l'equazione

$$x = k^2x^3 - 3kx^2 + 3x,$$

dalla quale risulta che le soluzioni sono $0, 1/k, 2/k$.

b) È $g'(x) = 3(kx-1)^2 \geq 0$, quindi la funzione è sempre crescente. Inoltre $g''(x) = 6\alpha(\alpha x - 1)$, quindi in $x = 1/k$ c'è un flesso. I grafici di $y = g(x)$ (per il valore 1 del parametro k) e della retta $y = x$ risultano



Poiché $g'(0) = 3$ e $g'(2/k = 3$, non c'è convergenza locale alle soluzioni 0 e$2/k$. C'è invece convergenza locale a $1/k$ in quanto $g'(1/k) = 0$. Dal grafico si vede che vi è convergenza a $1/k$ partendo da un qualsiasi punto in $(0, 2/k)$.

L'ordine di convergenza è 3, infatti

$$g'(1/k) = g''(1/k) = 0, \quad g'''(1/k) \neq 0.$$

c) Questo metodo serve ad approssimare il reciproco di un numero k senza che si debbano fare divisioni.

2.2.7 È data la funzione $f(x) = \sin x - kx$.

a) Si dica per quali valori del parametro k l'equazione $f(x) = 0$ ha una soluzione $\alpha \in (0, \pi/2)$.

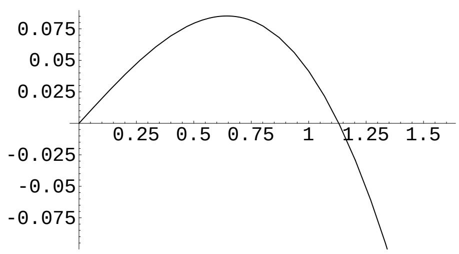
b) Per un tale k si studi la convergenza ad α del metodo delle tangenti.

c) Per un tale k si studi la convergenza ad α del metodo iterativo $x_{i+1} = \dfrac{\sin x_i}{k}$.
(18/6/2003)

Soluzione

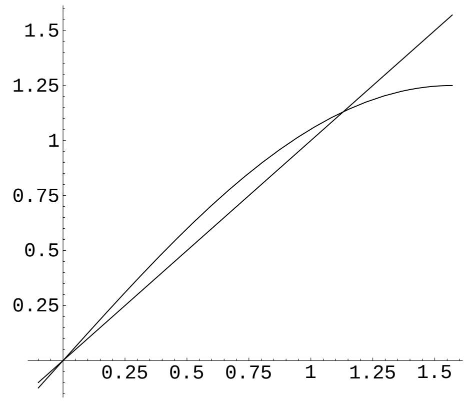
a) Le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ sono le ascisse dei punti di intersezione della retta $y = kx$ con la curva $y = \sin x$. È noto che per $k \geq 1$ la retta e la curva si intersecano solo in $x = 0$ (per $k = 1$ la retta e la curva sono tangenti). Per $0 < k < 1$ vi sono una o più soluzioni positive, ma ci interessano solamente i valori di k per cui la retta è compresa fra quella che passa per il punto $(\pi/2, 1)$ e la tangente. I valori cercati sono quindi $2/\pi < k < 1$.

b) Il grafico di $f(x)$ per un valore di k compreso fra $2/\pi \sim 0.64$ e 1 (esattamente il valore 0.8) risulta



Poichè $f'(x) = \cos x - k$ e $f''(x) = -\sin x$, risulta $f''(x) < 0$ per $x \in (0, \pi)$. Quindi il metodo delle tangenti converge ad α per ogni scelta del punto iniziale $x_0 \in (\alpha, \pi)$ e ha ordine 2.

c) I grafici di $y = g(x)$ (per il valore 0.8 del parametro k) e della retta $y = x$ risultano



Risulta evidente che per ogni $x_0 \in (0, \pi/2)$, il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, con $g(x) = \sin x/k$, produce una successione monotona convergente (crescente se $x_0 < \alpha$, decrescente se $x_0 > \alpha$). In realtà si otterrebbe una successione convergente ad α anche prendendo $x_0 \in [\pi/2, \pi)$, perché risulterebbe $x_1 \in (0, \pi/2)$. Poiché $g'(\alpha) \neq 0$ per $\alpha < \pi/2$, l'ordine di convergenza è 1.

2.2.8 Per $0 \leq k \leq 1$ l'equazione $f(x) = \cos^2 x - k = 0$ ha una soluzione $\alpha \in [0, \pi/2]$.

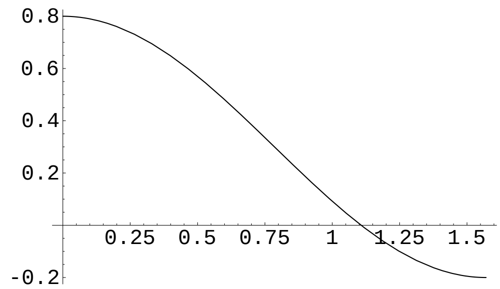
a) Si studi la convergenza ad α del metodo delle tangenti quando $0 < k < 1/2$.

b) Si studi la convergenza ad α del metodo delle tangenti quando $1/2 < k < 1$.

c) Si studi la convergenza ad α del metodo delle tangenti quando $k = 0$, $k = 1/2$ e $k = 1$. (4/6/2003)

Soluzione

a) Per $0 < k < 1/2$ il grafico di $f(x)$ risulta



con $\pi/4 < \alpha < \pi/2$. In questo intervallo è $f'(x) = -\sin(2x) \neq 0$ e $f''(x) = -2\cos(2x) > 0$. Per il teorema di convergenza in grande del metodo delle tangenti vi è convergenza monotona se $x_0 \in (\pi/4, \alpha)$. Inoltre esiste un punto $\bar{x} > \alpha$ tale che per ogni $x_0 \in (\alpha, \bar{x})$ risulta $x_1 \in (\pi/4, \alpha)$, quindi si ha convergenza per $x_0 \in (\pi/4, \bar{x})$. L'ordine del metodo è 2.

b) Analogo ad a) con $x_0 \in (\alpha, \pi/4)$.

c) Per $k = 0$ la soluzione è $\alpha = \pi/2$ di molteplicità 2. Per la scelta di x_0 valgono le considerazioni fatte al punto a) e quindi si ha convergenza a partire da $x_0 \in (\pi/4, \pi/2)$, però l'ordine del metodo è 1.

Per $k = 1$ la soluzione è $\alpha = 0$ di molteplicità 2. Si ha convergenza per $x_0 \in (0, \pi/4)$ e l'ordine del metodo è 1.

Per $k = 1/2$ la soluzione è $\alpha = \pi/4$, con $f'(\alpha) < 0$, $f''(\alpha) = 0$ e $f'''(\alpha) \neq 0$. Poiché la soluzione ha molteplicità 1, per il teorema di convergenza in piccolo del metodo delle tangenti esiste un intorno circolare $\mathcal{I}$ di α tale che per ogni $x_0 \in \mathcal{I}$ il metodo genera una successione convergente ad α con ordine 3. Per determinare $\mathcal{I}$ si può procedere nel modo seguente: si pone

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

e si ha

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Si cercano i punti x tali che $|g'(x)| < 1$, cioè i punti che verificano la disuguaglianza

$$|f(x)f''(x)| < [f'(x)]^2.$$

Poiché

$$f(x) = \cos^2 x - \frac{1}{2} = \frac{\cos(2x)}{2}, \quad f'(x) = -\sin(2x), \quad f''(x) = -2\cos(2x),$$

la disuguaglianza diventa

$$\cos^2(2x) < \sin^2(2x)$$

ed è verificata da $\pi/8 < x < 3\pi/8$. Quindi per ogni x_0 che dista da $\pi/4$ meno di $\pi/8$ la successione generata dal metodo delle tangenti risulta convergente.

2.3 Esercizi proposti

2.3.1 Data la funzione

$$f(x) = \frac{1-x}{e^x},$$

si tracci il grafico individuando in particolare l'ascissa α del punto di intersezione del grafico con l'asse delle ascisse e l'ascissa β del punto di minimo. Si applica il metodo delle tangenti all'equazione $f(x) = 0$.

a) Se si sceglie $x_0 < \alpha$ il metodo genera una successione convergente?

b) Se si sceglie $\alpha < x_0 < \beta$ il metodo genera una successione convergente?

c) Se si sceglie $x_0 > \beta$ il metodo genera una successione convergente?

d) In ciascuno dei casi precedenti in cui il metodo risulta convergente si indichi l'ordine di convergenza. (5/2/2007)

2.3.2 È data la funzione $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 1$.

a) Sapendo che $f(x) = 0$ ha la soluzione $\alpha = -1/3$, si separino le altre soluzioni dell'equazione, specificando per ciascuna di esse la molteplicità.

b) Si indichi con β la maggiore delle soluzioni e si studi la convergenza ad essa del metodo delle tangenti. Si indichi in particolare quale è l'ordine del metodo e che cosa accade se come punto iniziale si sceglie uno dei seguenti: $x_0 = 1/3$, $x_0 = 1/2$, $x_0 = 2$.

c) Si verifichi che l'ordine è quello indicato al punto b), usando la definizione di ordine di convergenza di un metodo iterativo. (7/2/2005)

2.3.3 Data l'equazione

$$f(x) = (x-1)(x+1)^3 + 1 = 0,$$

che si vuole risolvere usando il metodo delle tangenti, si verifichi che vi sono solo due soluzioni reali $\alpha = 0$ e $\beta > 0$.

a) Si dica, per ciascuno dei seguenti intervalli, se è possibile approssimare la soluzione indicata scegliendo come x_0 un punto qualsiasi nell'intervallo

$$\text{per} \quad \alpha \quad \text{in} \quad \mathcal{I}_1 = (-1/2, 0), \quad \mathcal{I}_2 = (0, 1/2), \quad \mathcal{I}_3 = (-3/2, -1)$$

$$\text{per} \quad \beta \quad \text{in} \quad \mathcal{I}_4 = (0, 1/2), \quad \mathcal{I}_5 = (0, 1), \quad \mathcal{I}_6 = (1/2, 3)$$

b) si dica se esiste un intorno di α (rispettivamente di β) in cui sia possibile scegliere x_0 in modo da ottenere una successione convergente ad α (rispettivamente a β). In caso affermativo si dica qual è l'ordine di convergenza. (9/6/2008)

2.3.4 È data l'equazione

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - x + 1 = 0.$$

a) Si disegni il grafico di $f(x)$. Quante soluzioni reali ha l'equazione?

b) Si determini un numero ω tale che il metodo delle tangenti converga per ogni $x_0 < \omega$.

c) Si dica che cosa accade applicando il metodo delle tangenti a partire dal punto $x_0 = 0$.

d) Si calcolino due iterazioni del metodo delle tangenti a partire dal punto $x_0 = -2$ e si dia una limitazione dell'errore assoluto da cui è affetta l'approssimazione trovata. (3/7/2006)

2.3.5 Per ognuna delle seguenti funzioni $f(x)$ si dica quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$ e si studi la convergenza del metodo delle tangenti (compresa la scelta del punto iniziale e l'ordine):

$$
\begin{array}{ll}
a) & f(x) = x^6 + 3x + 1, \quad (9/7/2003) \\
b) & f(x) = \mathrm{e}^x - 4x^2 + 4, \quad (4/11/2003) \\
c) & f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} + \dfrac{1}{2}, \quad (20/1/2004) \\
d) & f(x) = \mathrm{e}^x + x^2 - 2, \quad (10/2/2004) \\
e) & f(x) = (1-x)^3 + \dfrac{1}{2}, \quad (6/7/2004) \\
f) & f(x) = x - 2 + \dfrac{x^4}{3}, \quad (17/11/2004) \\
g) & f(x) = 3 \cdot 2^{x+3} - 7x - 24, \quad (9/6/2005) \\
h) & f(x) = 8x^5 - 9x^3 + x, \quad (12/9/2005) \\
i) & f(x) = \mathrm{e}^x \, \log x - 1, \quad (8/2/2006) \\
j) & f(x) = x^2 + x + 1, \quad (24/7/2006) \\
k) & f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x}, \quad (12/9/2006) \\
l) & f(x) = 50 - 10\,x - \sin x, \quad (19/7/2007) \\
m) & f(x) = f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{6}, \quad (17/1/2008) \\
n) & f(x) = \dfrac{x^2-3}{(3x^2+3)^{1/3}}, \quad (11/7/2008) \\
o) & f(x) = x - 2\log x - \dfrac{1}{x}, \quad (3/9/2008).
\end{array}
$$

2.3.6 È data la funzione

$$f(x) = x^2 - 2x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}.$$

a) Si determini una funzione $h(x)$ tale che $h^2(x) = f(x)$. Le due equazioni $f(x) = 0$ e $h(x) = 0$ sono equivalenti?

b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti alle soluzioni di $f(x) = 0$.

(c) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti alle soluzioni di $h(x) = 0$. (18/1/2006)

2.3.7 Si consideri l'equazione $e^x - kx = 0$.

a) Si trovino i valori del parametro k per cui l'equazione ha una soluzione negativa e si studi la convergenza del metodo delle tangenti per l'approssimazione di tale soluzione.

b) Si trovi il valore del parametro k per cui l'equazione ha una soluzione positiva di molteplicità 2 e si studi la convergenza del metodo delle tangenti per l'approssimazione di tale soluzione. (15/9/2004)

2.3.8 Per approssimare le soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ si vuole modificare il metodo delle tangenti utilizzando piuttosto che rette delle iperboli $y = b + a/x$. Supposto assegnato il punto iniziale x_0, come si calcola la successiva iterata x_1 del metodo modificato? (18/9/2002)

2.3.9 È assegnata la funzione $g(x) = \dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}$.

a) Si tracci il grafico di $g(x)$ individuando degli intervalli di separazione per i due punti fissi $\alpha < \beta$.

b) Se si sceglie $x_0 < \alpha$, cosa si deduce dal grafico circa la successione generata dal metodo $x_{k+1} = g(x_k)$?

c) Per $x > 0$ risulta $e^x > x$. Assumendo questa disuguaglianza, si dimostri che per $x > 0$ risulta $-1 < g'(x) < 0$.

d) Si spieghie come mai quanto dimostrato in c) implica che il metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ risulta localmente convergente a β. Si dica qual è l'ordine di convergenza del metodo.

e) Usando il teorema del punto fisso, si dimostri che per $0 < x_0 < \beta$ il metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ risulta convergente a β. (15/1/2007)

2.3.10 È data la funzione $g(x) = \dfrac{1}{4}(x+3)$.

a) Si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$.

b) Si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = [g(x_i)]^2$.

c) Si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = [g(x_i)]^3$. (13/9/2007)

2.3.11 Per ognuna delle seguenti funzioni $g(x)$ si dica quante soluzioni ha l'equazione $x = g(x)$ e si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, indicando, in caso di convergenza, l'ordine e un intervallo in cui scegliere il punto iniziale:

a) $g(x) = -\dfrac{x^6+1}{3}$, (9/7/2003)

b) $g(x) = \dfrac{4+\mathrm{e}^x}{4x}$, (4/11/2003)

c) $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$, (15/6/2004)

d) $g(x) = 2 - \dfrac{x^4}{3}$, (17/11/2004)

e) $g(x) = \dfrac{2-\cos x}{2x}$, (1/7/2005)

f) $g(x) = 3\log^2 x$, (21/7/2005)

g) $g(x) = -\log(\log x)$, (8/2/2006)

h) $g(x) = 2\sqrt{x} - 1$, (12/9/2006)

i) $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{4}$, (7/11/2006)

j) $g(x) = 5 - \dfrac{\sin x}{10}$, (19/7/2007)

k) $g(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^3}$, (25/6/2008)

l) $g(x) = 2\log x + \dfrac{1}{x}$, (3/9/2008)

m) $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } -1 \le x \le 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$ (26/6/2002)

n) $g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{per } x \ge 0, \\ -3x & \text{per } x < 0, \end{cases}$ (6/6/2002)

o) $g(x) = \begin{cases} -x/2 & \text{per } x \ge 0, \\ -3x & \text{per } x < 0, \end{cases}$ (6/6/2002).

2.3.12 È data l'equazione $f(x) = x^2 - \log(x+2) = 0.$

a) Con opportuna separazione grafica, si dica quante soluzioni reali ha l'equazione.

b) L'equazione $x = g(x)$, dove $g(x) = \sqrt{\log(x+2)}$ è equivalente all'equazione $f(x) = 0$?

c) Si consideri il metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, e se ne studi la convergenza, indicando anche come scegliere il punto iniziale e qual è l'ordine di convergenza. (13/1/2005)

2.3.13 È data l'equazione $x^4 - 3x + 1 = 0$.

a) Le due equazioni

$$x = g(x), \text{ dove } g(x) = \frac{x^4 + 1}{3}, \qquad \text{e} \qquad x = h(x), \text{ dove } h(x) = \sqrt[4]{3x - 1},$$

sono entrambe equivalenti all'equazione data?

b) Si studi la convergenza dei due metodi iterativi

$$x_{i+1} = g(x_i) \qquad \text{e} \qquad x_{i+1} = h(x_i). \quad (12/6/2006)$$

2.3.14 Sono date le tre equazioni

$$(1) \quad 2 \log x - x + 1 = 0, \qquad (2) \quad x = 2 \log x + 1, \qquad (3) \quad x = \exp((x - 1)/2).$$

a) Si dica se le tre equazioni sono equivalenti.

b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti applicato all'equazione (1).

c) Si studi la convergenza del metodo $x_{i+1} = g(x_i)$ applicato all'equazione (2).

d) Si studi la convergenza del metodo $x_{i+1} = g(x_i)$ applicato all'equazione (3) e si dica quale dei tre metodi è più conveniente usare. (7/6/2007)

2.3.15 È data l'equazione

$$f(x) = g(x) + 0.1\, x = 0, \quad \text{dove} \quad g(x) = x^3(x - 1).$$

a) Si dica quante soluzioni reali ha l'equazione e se ne diano degli intervalli di separazione. Si indichi con α la minima soluzione > 0.

b) Si studi la convergenza del metodo delle tangenti a tutte le soluzioni dell'equazione (scelta del punto iniziale e ordine del metodo).

c) Si studi la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = -\dfrac{g(x_i)}{0.1}$ alla soluzione α. (3/11/2005)

2.3.16 Data l'equazione

$$f(x) = x - \sin x = 0,$$

si studi la convergenza alla soluzione $\alpha = 0$ dei seguenti metodi iterativi:

a) $x_{i+1} = \sin x_i$,

b) metodo delle tangenti,

c) $x_{i+1} = x_i - 3\,\dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ (sugg. si studi il $\lim\limits_{x\to\alpha} g'(x)$). (7/2/2008)

2.3.17 È assegnata l'equazione $x = x^2 + k$ dove k è un numero reale.

a) Si determini per via grafica per quali valori di k l'equazione ha una soluzione negativa $\gamma(k)$.

b) Si dimostri che per $-\frac{3}{4} < k < 0$ il metodo iterativo $x_{i+1} = x_i^2 + k$ risulta localmente convergente a $\gamma(k)$. Si dica anche qual è l'ordine di convergenza. (22/1/2002)

2.3.18 È assegnata l'equazione $x = e^{-x} + k$ dove k è un numero reale.

a) Si determini per via grafica per quali valori di k l'equazione ha soluzione.

b) Si dimostri che per $k > -1$ il metodo $x_{i+1} = e^{-x_i} + k$ risulta localmente convergente.

c) Si dimostri che il metodo $x_{i+1} = e^{-x_i}$ risulta convergente per qualsiasi punto iniziale x_0. (14/2/2002)

2.3.19 L'equazione $x = kx(x-1)$ ha evidentemente la soluzione $\alpha = 0$. Si studi la convergenza del metodo iterativo

$$x_{i+1} = kx_i(x_i - 1),$$

alla soluzione α per diversi valori del parametro k. (25/5/2004)

2.3.20 La funzione $f(x) = e^x - 1 - kx$, con $k = 20$, è tale che $f(0) = 0$ ed ha un ulteriore zero α.

a) Si individui l'intero n tale che $\alpha \in (n, n+1)$.

b) Quanti passi del metodo di bisezione applicato all'intervallo $[n, n+1]$ occorre effettuare per individuare un numero $\widetilde{\alpha}$ tale che $\dfrac{|\widetilde{\alpha} - \alpha|}{|\alpha|} \le 10^{-6}$.

c) Si individuino tutti i punti iniziali per cui il metodo delle tangenti genera una successione convergente ad α.

d) Si dica se il metodo iterativo

$$x_{i+1} = \frac{(e^{x_i} - 1)}{k}$$

genera una successione convergente ad α, e in caso affermativo, a partire da quali punti x_0.

e) Si dica se il metodo iterativo

$$x_{i+1} = \log(1 + kx_i)$$

genera una successione convergente ad α, e in caso affermativo, a partire da quali punti x_0.

f) Fra i metodi discussi in b), c), d), e) quale può essere considerato il migliore? Quale il peggiore? (8/11/2007)

2.3.21 Sia $\alpha \in \mathbf{R}$. Una funzione $g(x)$ è tale che $g(\alpha) = \alpha$ e risulta $0 < g'(x) < 1$ e $g''(x) > 0$ su tutto $\mathbf{R}$.

a) Si tracci un grafico indicativo della funzione e della bisettrice (sugg: le ipotesi implicano che $g(x)$ interseca la bisettrice una sola volta).

b) Si dica per quali $x_0 \in \mathbf{R}$ il metodo $x_{k+1} = g(x_k)$ risulta convergente ad α e con che ordine.

c) Si individui il segno delle derivate di $f(x) = x - g(x)$ e si tracci un grafico indicativo della funzione.

d) Si dica per quali $x_0 \in \mathbf{R}$ il metodo delle tangenti applicato all'equazione $f(x) = 0$ risulta convergente ad α e con che ordine. (28/6/2007)