Capitolo 3

Autovalori e autovettori

3.1 Richiami di teoria

Prerequisiti: nozioni elementari di algebra lineare, numeri complessi.

Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$. Un numero λ per cui esiste un vettore $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ tale che valga la relazione

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

è detto **autovalore** di A ed $\boldsymbol{x}$ è detto **autovettore** corrispondente a λ. L'insieme degli autovalori di A costituisce lo **spettro** di A e il modulo massimo $\rho(A)$ degli autovalori è detto **raggio spettrale** di A.

- λ è autovalore di A se e solo se soddisfa l'equazione caratteristica

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

$p(\lambda)$n è un polinomio della forma

$$p(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\mathrm{tr}A\,\lambda^{n-1} + \ldots + \det A,$$

in cui tr$A$ è la **traccia** di A, cioè la somma degli elementi diagonali di A.

- Per il teorema fondamentale dell'algebra l'equazione caratteristica ha nel campo complesso n radici, tenendo conto della loro molteplicità. Quindi una matrice di ordine n ha, tenendo conto della loro molteplicità, n autovalori nel campo complesso. Dalle relazioni che legano i coefficienti e le radici di un'equazione algebrica risulta che:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}\,A \quad \text{e} \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A.$$

Proprietà degli autovalori

- Gli autovalori di una matrice A diagonale o triangolare (superiore o inferiore) sono uguali agli elementi diagonali.
- Un autovalore λ di A è anche autovalore di A^T.

- Sia λ un autovalore di A e $\boldsymbol{x}$ un autovettore corrispondente. Allora λ^i è autovalore di A^i e $\boldsymbol{x}$ è un autovettore corrispondente.
- Se $B = b_0 I + b_1 A + \ldots + b_k A^k$, dove $b_0, b_1, \ldots, b_k \in \mathbf{R}$, allora $\mu = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_k\lambda^k$ è autovalore di B e $\boldsymbol{x}$ è un autovettore corrispondente.
- Se A è non singolare, allora $\lambda \neq 0$ e $1/\lambda$ è autovalore di A^{-1} con $\boldsymbol{x}$ autovettore corrispondente.
- Due matrici A e B, legate da una relazione del tipo

$$A = PBP^{-1}$$

dove P è una matrice non singolare, sono dette **simili**. Due matrici simili hanno gli stessi autovalori.
- Una matrice A simile ad una matrice diagonale D si dice **diagonalizzabile**. Una matrice A di ordine n è diagonalizzabile se e solo se ha n autovettori linearmente indipendenti.
- Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti. Quindi se A ha n autovalori tutti distinti, allora ha n autovettori linearmente indipendenti e quindi è diagonalizzabile. Se A non ha n autovalori distinti, può avere n autovettori linearmente indipendenti oppure no.
- Una matrice simmetrica ha autovalori reali ed è diagonalizzabile.

Teorema di Gerschgorin

- I cerchi del piano complesso

$$K_i = \{\, z \in \mathbf{C} \;:\; |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \,\},\ \ i = 1, 2, \ldots, n,$$

di centro a_{ii} e raggio $r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$ sono detti **cerchi di Gerschgorin**. Vale il seguente teorema di Gerschgorin. *Gli autovalori della matrice A di ordine n sono tutti contenuti in*

$$\bigcup_{i=1,\ldots,n} K_i.$$

- Se l'unione M_1 di k cerchi di Gerschgorin è disgiunta dall'unione M_2 dei rimanenti $n-k$, allora k autovalori appartengono a M_1 e $n-k$ autovalori appartengono a M_2.
- Una matrice $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ si dice **a predominanza diagonale in senso stretto** se per ogni $i = 1, \ldots, n$ risulta

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}} |a_{ij}|.$$

Una matrice a predominanza diagonale in senso stretto è non singolare.
- Per calcolare un autovalore e il corrispondente autovettore conviene applicare il **metodo delle potenze** o una delle sue varianti.

3.2 Esercizi svolti

3.2.1 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica quanto è il rango di A e se ne calcolino gli autovalori e gli autovettori.

b) Si dica se A è diagonalizzabile. (3/11/2005)

Soluzione

a) È facile verificare che $\det A = 0$ e che il rango di A è 2. Infatti le prime due righe sono linearmente indipendenti, mentre la terza riga cambiata di segno è uguale alla somma delle prime due. L'equazione caratteristica risulta

$$p(A) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^2(\lambda - 2) = 0.$$

Quindi gli autovalori di A sono $\lambda_1 = 0$ di molteplicità 2 e $\lambda_2 = 2$ di molteplicità 1.

b) Gli autovettori relativi a λ_1 sono le soluzioni non nulle del sistema

$$A\,\boldsymbol{x} = \lambda_1\,\boldsymbol{x},$$

cioè

$$(A - \lambda_1 I)\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Risolvendo il sistema si vede che gli autovalori relativi a λ_1 devono avere la forma

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} k \\ -2k \\ k \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad k \neq 0.$$

Ripetendo il calcolo con λ_2, si vede che gli autovalori relativi a λ_2 devono avere la forma

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} h \\ -h \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad h \neq 0.$$

Quindi vi sono due soli autovettori linearmente indipendenti, ad esempio

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Perciò A non è diagonalizzabile.

3.2.2 È data la matrice A di ordine $n = 4$ di elementi

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i+j = n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e la matrice $B = I + A$, dove I è la matrice identica di ordine n. Senza costruire i polinomi caratteristici di A e di B,

a) si verifichi che $A^2 = I$ e si dica che relazione devono verificare gli autovalori di A,

b) si dica che relazione c'è fra gli autovalori di A e di B e quanti sono gli autovalori nulli di B. Da questo si deduca quali sono gli autovalori di A e di B,

c) si determinino gli autovettori di A e di B e si dica se A è diagonalizzabile,

d) si generalizzi al caso n pari qualsiasi. (6/7/2004)

Soluzione È

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) È facile verificare che $A^2 = I$ per calcolo diretto. Detti λ_A gli autovalori di A, deve accadere che $\lambda_A^2 = 1$. Poiché A è simmetrica, i suoi autovalori sono reali, quindi deve essere $\lambda_A = 1$ oppure $\lambda_A = -1$.

b) Gli autovalori λ_B di B verificano la relazione $\lambda_B = \lambda_A + 1$. La matrice B ha solo due righe linearmente indipendenti, quindi due soli autovalori non nulli. Ai due autovalori nulli di B corrispondono due autovalori di A uguali a -1. Gli altri due autovalori di A devono essere uguali a 1, quindi corrispondono a due autovalori di B che valgono 2.

c) Indicato con

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

un autovettore di A, è facile vedere che gli autovettori corrispondenti all'autovalore $\lambda_A = 1$ devono verificare le relazioni

$$x_1 = x_4, \quad \text{e} \quad x_2 = x_3,$$

mentre quelli corrispondenti all'autovalore $\lambda_A = -1$ devono verificare le relazioni

$$x_1 = -x_4, \quad \text{e} \quad x_2 = -x_3.$$

Quindi vi sono quattro autovettori linearmente indipendenti, ad esempio

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi A è diagonalizzabile. B ha gli stessi autovettori di A.

d) Per un generico n pari, A ha l'autovalore 1 e l'autovalore -1, entrambi di molteplicità $n/2$. B ha l'autovalore 2 e l'autovalore 0, entrambi di molteplicità $n/2$. Le componenti degli autovettori di A corrispondenti all'autovalore 1 devono verificare le relazioni $x_i = x_{n+1-i}$ per $i = 1, \ldots, n/2$, quelle degli autovettori di A corrispondenti all'autovalore -1 devono verificare le relazioni $x_i = -x_{n+1-i}$ per $i = 1, \ldots, n/2$.

3.2.3 Siano A una matrice di ordine n e $\boldsymbol{e}_k$ il k-esimo vettore canonico di $\mathbf{R}^n$.

a) Si dica chi è $A\boldsymbol{e}_k$.

b) Si verifichi che se A ha nulla la k-esima colonna, A ha un autovalore nullo con corrispondente autovettore $\boldsymbol{e}_k$.

c) Si dimostri che la k-esima colonna di A, se non è nulla, è un autovettore di A se e solo se è multipla $\boldsymbol{e}_k$. (18/9/2002)

Soluzione

a) $A\boldsymbol{e}_k$ è la k-esima colonna di A.

b) Se la k-esima colonna di A è nulla, allora

$$A\boldsymbol{e}_k = \mathbf{0},$$

quindi $\boldsymbol{e}_k$ è un autovettore di A corrispondente all'autovalore nullo.

c) Se la k-esima colonna è multipla di $\boldsymbol{e}_k$, vuol dire che essa ha un solo elemento diverso da zero, ed esattamente la componente a_{kk}, per cui risulta

$$A\boldsymbol{e}_k = a_{kk}\boldsymbol{e}_k.$$

Quindi $\boldsymbol{e}_k$ è un autovettore di A corrispondente all'autovalore $\lambda = a_{kk}$. Viceversa, si suppone che $\boldsymbol{e}_k$ sia un autovettore di A corrispondente ad un autovalore λ, cioè

$$A\boldsymbol{e}_k = \lambda\boldsymbol{e}_k.$$

Ne segue che la k-esima riga di A ha la forma $\lambda\boldsymbol{e}_k$, cioè ha la sola k-esima componente uguale a λ.

3.2.4 Sono dati due vettori non nulli $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$, con $n \geq 2$. Si consideri la matrice $A = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T$, detta diade.

a) Si dica quanto vale $\det A$. Se ne deduca che A ha almeno un autovalore $\overline{\lambda} = 0$.

b) Si dica quanti autovettori linearmente indipendenti corrispondenti a $\overline{\lambda}$ ha A.

c) Si dica che forma dovrebbero avere un autovalore non nullo di A e il corrispondente autovettore.

d) Si dica quanto vale la traccia di A e si determinino tutti gli autovalori di A.

e) Si determinino tutti gli autovettori di A e si dica quando A è diagonalizzabile.

Soluzione

a) La i-esima colonna di A è $\boldsymbol{c}_i = v_i\,\boldsymbol{u}$, dove v_i è la i-esima componente di $\boldsymbol{v}$. Quindi A ha una sola colonna linearmente indipendente e $\det A = 0$. Poichè $\det A$ è uguale al prodotto degli autovalori di A, almeno uno degli autovalori di A è nullo. Sia $\overline{\lambda}$ tale autovalore.

b) Per trovare gli autovettori di A relativi a $\overline{\lambda}$ si considera la relazione

$$A\,\boldsymbol{x} = \overline{\lambda}\,\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0},$$

che nel nostro caso risulta

$$\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}.$$

Poiché $\boldsymbol{u}$ è non nullo, deve essere $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} = 0$, quindi $\boldsymbol{x}$ deve essere un vettore di $\mathbf{R}^n$ ortogonale a $\boldsymbol{v}$. In $\mathbf{R}^n$ vi sono $n-1$ vettori lineramente indipendenti e ortogonali ad un vettore assegnato. Ne segue che A ha $n-1$ autovettori linearmente indipendenti corrispondenti a $\overline{\lambda}$. Siano $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ tali vettori.

c) Un autovettore λ non nullo di A e il corrispondente autovettore $\boldsymbol{x}$ devono verificare la relazione

$$A\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u} = \lambda\,\boldsymbol{x}, \qquad \lambda \neq 0, \quad \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0},$$

e questo è possibile solo se

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} \quad \text{e} \quad \lambda = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}.$$

Quindi esiste almeno un autovalore non nullo di A solo se $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u} \neq 0$ e in tal caso vi è un solo autovettore corrispondente che è $\boldsymbol{u}$.

d) La traccia di A è $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$. Quindi la somma degli autovalori di A è uguale a $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$. Poiché gli autovalori non nulli di A possono avere solo la forma $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$, ne segue che A ha un solo autovalore di questa forma. Quindi se $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u} \neq 0$, A ha l'autovalore non nullo $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$ e l'autovalore $\lambda = 0$ di molteplicità $n-1$, mentre se $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u} = 0$, A ha solo l'autovalore $\lambda = 0$ di molteplicità n.

e) Se $\boldsymbol{u}$ fosse linearmente dipendente da $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$, $\boldsymbol{u}$ risulterebbe ortogonale a $\boldsymbol{v}$, cioè risulterebbe $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u} = 0$, in caso contrario $\boldsymbol{u}$ non sarebbe ortogonale a $\boldsymbol{v}$, cioè risulterebbe $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u} \neq 0$. Riassumendo:
(1) se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ non sono ortogonali, A ha l'autovalore non nullo $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}$ e l'autovalore $\overline{\lambda} = 0$ di molteplicità $n-1$. I corrispondenti autovettori sono $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$. Quindi A è diagonalizzabile.
(2) se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ sono ortogonali, A ha solo l'autovalore $\overline{\lambda} = 0$ di molteplicità n e i corrispondenti autovettori sono $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_{n-1}$. Quindi A non è diagonalizzabile.

3.2.5 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Utilizzando i cerchi di Gerschgorin ed evitando il calcolo esplicito del polinomio caratteristico si risponda alle domande seguenti.

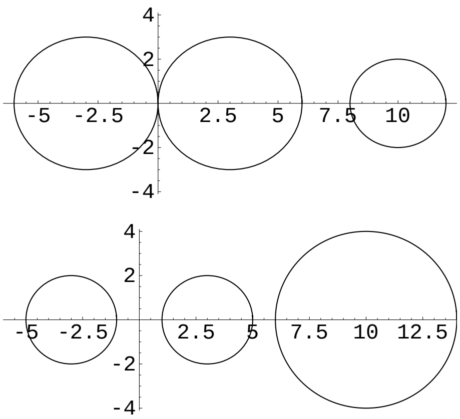
a) Si dica quanto possibile circa il numero di autovalori reali della matrice.

b) Si determinino delle limitazioni inferiori e superiori per i moduli degli autovalori della matrice.

c) La matrice è singolare? (7/11/2001)

Soluzione

I cerchi di Gerschgorin per riga e per colonna della matrice A sono i seguenti



a) La matrice A ha coefficienti reali e quindi il suo polinomio caratteristico ha coefficienti reali. Dunque se A avesse autovalori non reali anche i coniugati di questi numeri dovrebbero essere autovalori. Tenuto conto che i cerchi per colonna sono disgiunti si deduce che A ha tre autovalori reali.

b) Tenuto conto sia dei cerchi per riga che di quelli per colonna si ottiene $1 \leq |\lambda_1| \leq 5$, $1 \leq |\lambda_2| \leq 5$ e $8 \leq |\lambda_3| \leq 12$.

c) Dal punto precedente sappiamo che 0 non può essere autovalore di A e quindi A non può essere singolare. In modo equivalente si perviene alla stessa conclusione osservando che la matrice A è a predominanza diagonale in senso stretto per colonne.

3.2.6 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 3/2 & 6 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & -1 \end{bmatrix}$$

Sfruttando i cerchi di Gerschgorin

a) si dica quanti sono al più gli autovalori non reali di A, e per gli eventuali autovalori reali si diano degli intervalli che li contengono,

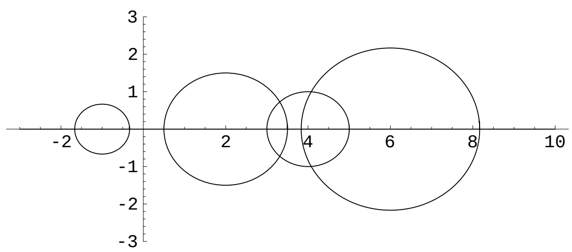
b) si individuino due costanti α, $\beta \geq 0$ tali che $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$, dove $\rho(A)$ è il raggio spettrale di A,

c) si dica se è possibile che $\det A = 0$,

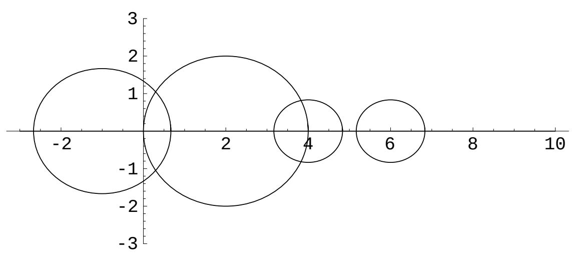
d) si dica quanto vale la somma degli autovalori. (17/12/2003)

Soluzione

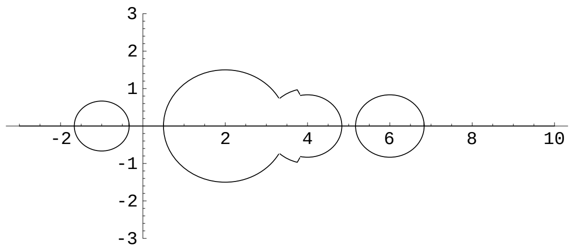
L'unione U_1 dei cerchi di Gerschgorin per righe è



L'unione U_2 dei cerchi di Gerschgorin per colonne è



L'intersezione $U_3 = U_1 \bigcap U_2$ è



a) I due cerchi di centro -1 e 6 risultano disgiunti dagli altri, quindi contengono ciascuno un solo autovalore, che risulta essere reale. Indicati con λ_1 e λ_4 questi due autovalori, si ha $-5/3 \leq \lambda_1 \leq -1/3$ e $31/6 \leq \lambda_4 \leq 41/6$. Pertanto gli autovalori non reali possono essere al più 2.

b) È $\rho(A) = \lambda_4$, quindi $31/6 \leq \rho(A) \leq 41/6$.

c) No, perché l'origine del piano complesso non appartiene a U_3, quindi A non ha autovalori nulli.

d) È $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \lambda_i = \text{tr } A = 11.$

3.3 Esercizi proposti

3.3.1 Una matrice A quadrata di ordine n è tale che $A^2 - 3A + 2I = O$, dove I e O indicano rispettivamente la matrice nulla e la matrice identica.

a) Sia λ autovalore di A e $\boldsymbol{x}$ autovettore associato a λ. Sfruttando la relazione $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ e il fatto che $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ si dimostri che risulta $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$.

b) Si risolva l'equazione ottenuta al punto precedente per dedurre quali sono gli unici due possibili valori di λ. Come mai i risultati ottenuti implicano che A deve essere invertibile?

c) Si dimostri che risulta $A^{-1} = \dfrac{3}{2}I - \dfrac{1}{2}A$.

d) Sfruttando il risultato ottenuto al punto precedente, si proponga un metodo per risolvere il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e si valuti quante operazioni moltiplicative sono richieste. (7/6/2007)

3.3.2 È data una matrice A di ordine $n \geq 3$ i cui elementi sono

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i < j, \\ i & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i > j. \end{cases}$$

a) Per $n = 4$ si calcolino gli autovalori e gli autovettori della matrice A.

b) Si generalizzi il risultato trovato ad n qualsiasi.

c) Si scriva una matrice S tale che $A = SDS^{-1}$, dove D è una matrice diagonale. (8/2/2006)

3.3.3 Si calcoli il polinomio caratteristico di una matrice della forma

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Sfruttando il risultato ottenuto, si scriva una matrice A il cui polinomio caratteristico sia $p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.

b) Si determinino gli autovalori di A e si dica se A è diagonalizzabile. (5/2/2007)

3.3.4 a) Si dimostri che gli elementi v_{ij} di una matrice ortogonale V sono tali che $|v_{ij}| \leq 1$.

b) Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ una matrice simmetrica. Sfruttando il fatto che A è diagonalizzabile mediante matrici ortogonali, si dimostri che gli elementi a_{ij} di A sono tali che $|a_{ij}| \leq n\,\rho(A)$. (16/7/2002)

3.3.5 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica se gli autovalori di A sono tutti reali.

b) Si dica se A è diagonalizzabile.

c) Si dica se A è singolare

d) Si dimostri che $\rho(A) \leq 8$.

e) Si dimostri che 8 non è autovalore di A. (22/1/2002)

3.3.6 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Mediante i cerchi di Gerschgorin si dia una limitazione inferiore e superiore degli autovalori di A.

b) Si calcolino gli autovalori della matrice $B = A - 3/4I$, dove I è la matrice identica di ordine 3.

c) Si dica quali sono gli autovalori di A e di A^{-1}. (13/1/2005)

3.3.7 Si consideri la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

a) Si calcolino gli autovalori di A.

b) Si verifichi che la somma degli autovalori è uguale alla traccia di A e il prodotto degli autovalori è uguale al determinante di A.

c) Si dica se A è diagonalizzabile.

d) Si disegnino sul piano complesso gli autovalori di A e l'insieme al quale devono appartenere secondo il teorema di Gerschgorin.

e) Indicando con R_i e C_i, per $i = 1, 2$ i cerchi per riga e per colonna di A, si accerti, con un opportuno disegno, se gli autovalori appartengono o meno all'insieme $(R_1 \cap C_1) \cup (R_2 \cap C_2)$. (19/12/2006)

3.3.8 Sono date le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0.2 & -1 \\ 5 & 4 & -10 \\ -1 & -0.4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{bmatrix}$$

a) Sfruttando i cerchi di Gershgorin si dia una limitazione superiore al raggio spettrale di A.

b) Si calcoli la matrice $B = S^{-1}AS$. Sfruttando i cerchi di Gershgorin di B si dica

c) se gli autovalori di A sono tutti reali,

d) se la limitazione superiore al raggio spettrale di A data al punto a) può essere migliorata,

e) se la matrice A è invertibile. (17/11/2004)

3.3.9 Sia $k \in \mathbf{R}$ e si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 & 1 \\ 4k & 1 & 0 & 1 \\ k & k & -3 & 1 \\ 2k & 2k & 2k & 6 \end{bmatrix}$$

a) Quali sono gli autovalori di A per $k = 0$?

b) Si dica per quali k tutti i cerchi di Gerschgorin di A risultano a due a due disgiunti.

c) Per i k così individuati si dica se A è diagonalizzabile e si dia una limitazione superiore e inferiore di $\rho(A)$.

d) Si dica se ci sono valori di k per cui il vettore $\boldsymbol{e}$ di componenti tutte uguali a 1 risulta autovettore di A. (20/12/2007)

Capitolo 4

Sistemi lineari

4.1 Richiami di teoria

Prerequisiti: teoremi di esistenza e unicità della soluzione dei sistemi lineari.

Norme • Si chiama **norma vettoriale** una funzione che ad ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ associa un numero reale, indicato con $\|\boldsymbol{x}\|$, e che verifica le seguenti proprietà

a) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ e $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ se e solo se $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

b) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha| \; \|\boldsymbol{x}\|$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$,

c) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ per ogni $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$.

• Le norme vettoriali più usate sono

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|.$$

• Valgono le relazioni

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|\boldsymbol{x}\|_\infty,$$
$$\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|\boldsymbol{x}\|_2.$$

• Si chiama **norma matriciale** una funzione che ad ogni $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ associa un numero reale, indicato con $\|A\|$, e che verifica le seguenti proprietà

a) $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0$ se e solo se $A = O$,

b) $\|\alpha A\| = |\alpha| \; \|A\|$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$,

c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ per ogni $B \in \mathbf{R}^n$,

d) $\|AB\| \leq \|A\| \; \|B\|$ per ogni $B \in \mathbf{R}^n$.

• Per una norma matriciale qualsiasi risulta

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m, \qquad \|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}, \qquad \rho(A) \leq \|A\|.$$

- Le norme matriciali più usate sono:

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}, \qquad \|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

- Una norma vettoriale $\| \,.\, \|_v$ e una norma matriciale $\| \,.\, \|_m$ si dicono **compatibili** se

$$\|A\boldsymbol{x}\|_v \le \|A\|_m \, \|\boldsymbol{x}\|_v \quad \text{per ogni} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Le norme matriciali 1, 2, ∞ sono compatibili con le corrispondenti norme vettoriali.

- Valgono le relazioni

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \, \|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{n} \, \|A\|_\infty.$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \, \|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n} \, \|A\|_1,$$

$$\max_{i,j} |a_{ij}| \le \|A\|_2 \le n \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

- Se A è una matrice simmetrica, risulta

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty \qquad \text{e} \qquad \|A\|_2 = \rho(A),$$

mentre se A è qualsiasi risulta

$$\rho(A) \le \|A\|$$

per qualunquae norma.

Condizionamento • Dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ e $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$, per studiare l'errore inerente si suppone diperturbare il vettore $\boldsymbol{b}$ con un vettore $\delta\boldsymbol{b}$. Allora la soluzione $\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}$ del sistema perturbato

$$A\,(\boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \delta\boldsymbol{b}$$

verifica la relazione

$$\epsilon_x \le \mu(A)\,\epsilon_b, \quad \text{dove} \quad \epsilon_x = \frac{\|\delta\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}, \quad \epsilon_b = \frac{\|\delta\boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}, \quad \mu(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|.$$

$\mu(A)$ è detto **numero di condizionamento** di A.

- Se A è una matrice simmetrica non singolare è

$$\mu_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

in cui $\lambda_{\max}$ e $\lambda_{\min}$ sono rispettivamente il massimo e il minimo modulo degli autovalori di A.

Metodo di Gauss • Se A è triangolare, il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ viene risolto per sostituzione con un costo di $n^2/2$ operazioni moltiplicative. Se A non è triangolare, si applica il **metodo di eliminazione di Gauss**, che costruisce mediante combinazioni lineari di righe una successione di matrici

$$[\,A^{(1)} \mid \boldsymbol{b}^{(1)}\,] = [\,A \mid \boldsymbol{b}\,], \quad [\,A^{(2)} \mid \boldsymbol{b}^{(2)}\,], \quad \ldots, \quad [\,A^{(n)} \mid \boldsymbol{b}^{(n)}\,]$$

tali che tutti i sistemi $A^{(k)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(k)}$ siano equivalenti e che l'ultima matrice $A^{(n)}$ sia triangolare superiore.

• Al generico k-esimo passo la matrice $[\,A^{(k+1)} \mid \boldsymbol{b}^{(k+1)}\,]$ è costruita a partire dalla $[\,A^{(k)} \mid \boldsymbol{b}^{(k)}\,]$ nel modo seguente: per $i = 1, \ldots, k$ si pone

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}, \quad \text{per } j = 1, \ldots, n, \quad \text{e} \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)},$$

per $i = k+1, \ldots, n$ si pone

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \quad \text{per } j = 1, \ldots, n, \text{ e } b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)},$$

dove $m_{ik} = a_{ik}^{(k)}/a_{kk}^{(k)}$ è il moltiplicatore della i-esima riga e $a_{kk}^{(k)}$ è il **pivot** al k-esimo passo. Il costo del metodo di Gauss è di circa $n^3/3$ operazioni moltiplicative.

• Si può applicare il metodo di Gauss anche per calcolare il determinante di A (con lo stesso costo $n^3/3$) o la matrice inversa A^{-1} (con costo n^3).

• Il metodo di Gauss è applicabile senza effettuare scambi di righe se le sottomatrici principali di testa A_k di A sono non singolari per $1 \leq k \leq n-1$. Se ciò non accade, ma A è non singolare, si può ugualmente applicare il metodo di Gauss e calcolare la soluzione, effettuando uno scambio di righe del sistema.

• La stabilità del metodo di Gauss dipende da quanto crescono gli elementi delle matrici $A^{(k)}$ rispetto a quelli della matrice A. Il metodo è tanto più stabile quanto minore è questa crescita. La strategia del **massimo pivot** limita la crescita degli elementi di $A^{(k)}$. Al k-esimo passo si determina l'indice di riga r per cui

$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq i \leq n} |a_{ik}^{(k)}|,$$

e si scambiano la r-esima riga con la k-esima prima di calcolare $A^{(k+1)}$.

Metodi iterativi per sistemi lineari • Metodi iterativi per risolvere il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si ottengono dalla decomposizione $A = M - N$, dove M è una matrice non singolare. Posto $P = M^{-1}N$ e $\boldsymbol{q} = M^{-1}\boldsymbol{b}$, si ottiene il seguente sistema equivalente al sistema dato

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q},$$

da cui si ricava il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{(k)} = P\boldsymbol{x}^{(k-1)} + \boldsymbol{q}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

• La matrice P viene detta **matrice di iterazione** del metodo. Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza è $\rho(P) < 1$. Condizione sufficiente per la convergenza è $\|P\| < 1$ per una qualche norma matriciale $\| \ \|$. Il metodo è tanto più veloce quanto minore è $\rho(P)$.

• Come criterio di arresto si può usare

$$\|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{x}^{(k-1)}\| \leq \epsilon.$$

Questa condizione però non garantisce che la soluzione sia stata approssimata con la precisione ϵ.

• Il metodo iterativo di Jacobi è ricavato dalla decomposizione $A = D - (B + C)$ dove D è formata dalla diagonale principale di A, il metodo iterativo di Gauss-Seidel è ricavato dalla decomposizione $A = (D - B) - C$ dove $D - B$ è formata dalla sottomatrice triangolare inferiore compresa la diagonale principale di A. La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è $J = D^{-1}(B + C)$, la matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è $G = (D - B)^{-1}C$. Quindi il metodo di Jacobi converge se e solo se $\rho(J) < 1$ e il metodo di Gauss-Seidel converge se e solo se $\rho(G) < 1$.

• In pratica il metodo di Jacobi viene implementato nel modo seguente:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\Bigg[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\Bigg], \quad i = 1, 2, \ldots,$$

e il metodo di Gauss-Seidel viene implementato nel modo seguente:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)}\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

• Se la matrice A è a predominanza diagonale in senso stretto (per righe o per colonne), il metodo di Jacobi e il metodo di Gauss-Seidel convergono.

4.2 Esercizi svolti

4.2.1 È assegnata la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Si verifichi che $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$.

b) Si determini una limitazione superiore per $\mu_2(A)$.

c) Si dimostri che il metodo di Gauss è applicabile alla matrice A senza scambi di righe. Successivamente, si determini la matrice triangolare superiore $A^{(5)}$ ottenuta applicando ad A il metodo di eliminazione di Gauss.

d) Si calcoli il $\det A$.

e) Si risolva il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_5$, dove $\boldsymbol{e}_5$ è l'ultimo vettore della base canonica di $\mathbf{R}^5$. (18/12/2001)

Soluzione

a) Il calcolo diretto mostra che $\|A\|_1 = 9 = \|A\|_\infty$. Alternativamente si può osservare che A è simmetrica e la norma uno ed infinito di una matrice simmetrica sono uguali.

b) La matrice A è simmetrica e dalla teoria è noto che per le matrici simmetriche risulta

$$\mu_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}},$$

dove $\lambda_{\max}$ e $\lambda_{\min}$ sono rispettivamente il massimo e il minimo modulo degli autovalori di A. Utilizzando i cerchi di Gerschgorin si trova $\mu_2(A) \leq 9$.

c) Il metodo di eliminazione di Gauss è applicabile ad A senza scambi di righe perché A è una matrice a predominanza diagonale in senso stretto. Si trova

$$A^{(5)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

d) Risulta $\det A = \det A^{(5)} = 4^5 = 1024$.

e) Il sistema $Ax = \boldsymbol{e}_5$ risulta equivalente al sistema $A^{(5)}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_5$. Si trova

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1/64 \\ -1/32 \\ 1/16 \\ -1/8 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

4.2.2 È data la matrice A di ordine n di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } i < j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Si calcoli A^{-1} nel caso $n = 5$.

b) Si generalizzi al caso di n qualsiasi, verificando la correttezza della generalizzazione mediante il prodotto $A^{-1}A$.

c) Si calcoli $\mu_\infty(A)$. (18/6/2003)

Soluzione

a) Per $n = 5$, si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Si fa la congettura che per n qualsiasi $B = A^{-1}$ abbia gli elementi

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 2^{j-i-1} & \text{se } i < j, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Verifichiamo che $C = AB = I$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=i}^{n} a_{ik} b_{kj} = b_{ij} - \sum_{k=i+1}^{n} b_{kj}.$$

Se $i > j$ è $b_{ij} = 0$ e $b_{kj} = 0$ per $k = i+1, \ldots, n$. Quindi $c_{ij} = 0$.

Se $i = j$ è $b_{ii} = 1$ e $b_{kj} = 0$ per $k = i+1, \ldots, n$, quindi $c_{ii} = 1$.

Se $i < j$ è

$$c_{ij} = 2^{j-i-1} - \sum_{k=i+1}^{n} b_{kj} = 2^{j-i-1} - \sum_{k=i+1}^{n} 2^{j-i-1} = 2^{j-i-1} - 2^{-1}(2^{j-i-1} + \cdots + 1) = 0$$

Quindi $C = I$ e l'inversa di A è stata trovata correttamente.

c) Risulta $||A||_\infty = n$ e

$$||A^{-1}||_\infty = 1 + \sum_{j=2}^{n} 2^{j-2} = 2^{n-1},$$

quindi $\mu_\infty(A) = n\, 2^{n-1}$.

4.2.3 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Si calcoli l'inversa di A applicando il metodo di Gauss.

b) Si calcoli il numero di condizionamento di A in norma infinito.

c) Si dica se i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel risultano convergenti. (7/2/2003)

Soluzione

a) Applicando Gauss alla matrice $[A|I]$ abbiamo

$$\left[A^{(1)}|I\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right] = \left[A^{(3)}|B^{(3)}\right]$$

Risolvendo il sistema triangolare $A^{(3)}X = B^{(3)}$, otteniamo l'inversa di A

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 3/5 & -1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1/20 & -1/10 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

b) Poiché $\|A\|_\infty = 5$ e $\|A^{-1}\|_\infty = 9/5$, il numero di condizionamento di A in norma infinito risulta

$$\mu_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = 9.$$

c) Le matrici di Jacobi e di Gauss-Seidel risultano

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & -1/24 & 0 \end{bmatrix}.$$

I polinomi caratteristici sono

$$p_J(\lambda) = \lambda^4 - \frac{\lambda^2}{6} \quad \text{e} \quad p_G(\lambda) = \lambda^3(\lambda - \frac{1}{6)}).$$

Gli autovalori di J sono $0, 0, 1/\sqrt{6}$ e $-1/\sqrt{6}$, quindi $\rho(J) = 1/\sqrt{6}$. Gli autovalori di G sono $0, 0, 0, 1/6$, quindi $\rho(G) = 1/6$. Entrambi i metodi risultano convergenti.

4.2.4 È data la matrice A di ordine 4 di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -k & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \qquad k \in \mathbf{R}.$$

a) Si determini l'insieme I_1 dei valori di k per cui la matrice ha predominanza diagonale in senso stretto.

b) Si determini l'insieme I_2 dei valori di k per cui il metodo di Gauss-Seidel applicato ad un sistema lineare con matrice A è convergente.

c) Si dica se $I_1 \subset I_2$ oppure $I_2 \subset I_1$ oppure $I_1 = I_2$. (4/6/2003)

Soluzione Si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ -k & 1 & -k & 0 \\ 0 & -k & 1 & -k \\ 0 & 0 & -k & 1. \end{bmatrix}$$

a) $I_1 = \{k : |k| < 1/2\}$.

b) La matrice di Gauss-Seidel risulta

$$G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -k & 1 & & \\ 0 & -k & 1 & \\ 0 & 0 & -k & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & k & & \\ 0 & 0 & k & \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & k & 0 \\ 0 & k^3 & k^2 & k \\ 0 & k^4 & k^3 & k^2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di G sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$p(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 3k^2\lambda + k^4) = 0,$$

ed esattamente

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{k^2}{2}(3 - \sqrt{5}), \quad \lambda_4 = \frac{k^2}{2}(3 + \sqrt{5}).$$

Imponendo che $\lambda_4 < 1$ si ha

$$I_2 = \left\{ k : |k| < \sqrt{\frac{2}{3 + \sqrt{5}}} \right\}.$$

c) Poichè $\sqrt{\dfrac{2}{3+\sqrt{5}}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} > \dfrac{1}{2}$, risulta $I_1 \subset I_2$.

4.2.5 Si consideri il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}.(9/7/2003)$$

a) Si dica se esistono valori di k per cui la matrice ha predominanza diagonale in senso stretto.

b) Si determinino tutti i valori di k per cui i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel convergono.

c) Si dica per quali valori di k la convergenza è più rapida.

Soluzione

a) Non esistono valori di k per cui la matrice ha predominanza diagonale in senso stretto.

b) La matrice d'iterazione del metodo di Jacobi risulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & -k/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di J è

$$p_J(\lambda) = (\lambda^2 - \frac{1}{2})(\lambda^2 - \frac{k}{8}).$$

Gli autovalori di J sono

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad |\lambda_{3,4}| = \sqrt{\frac{|k|}{8}}.$$

Quindi il metodo di Jacobi converge per $|k| < 8$.

La matrice d'iterazione del metodo di Gauss-Seidel risulta

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & k/8 & 0 \\ & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di G è

$$p_G(\lambda) = \lambda^2(\lambda - \frac{k}{8})(\lambda - \frac{1}{2}).$$

Gli autovalori di G sono

$$\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_4 = \frac{k}{8}.$$

Quindi anche il metodo di Gauss-Seidel converge per $|k| < 8$.

c) La massima velocità di convergenza si ha per $|k| \leq 4$ per entrambi i metodi ed il raggio spettrale è $1/\sqrt{2}$ nel caso di Jacobi e $1/2$ nel caso di Gauss-Seidel.

4.2.6 Si consideri il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, in cui la matrice A di ordine n ha gli elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ k & \text{se } i \neq j, \end{cases} \qquad k \in \mathbf{R}.$$

a) Per $n = 3$ si costruisca la matrice di iterazione del metodo di Jacobi e si dica per quali valori di k il metodo converge.

b) Per n generico, si verifichi che la matrice di iterazione di Jacobi ha la forma $J = k\left(I - \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T\right)$, dove $\boldsymbol{e}$ è il vettore di tutti 1, e si calcolino gli autovalori di J sfruttando gli autovalori della diade. Per quali valori di k il metodo converge? (16/9/2003)

Soluzione

a) Per $n = 3$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k & k \\ k & 1 & k \\ k & k & 1 \end{bmatrix}$$

da cui la matrice di Jacobi risulta

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -k & -k \\ -k & 0 & -k \\ -k & -k & 0 \end{bmatrix}$$

Affinché il metodo di Jacobi sia convergente deve essere soddisfatta la condizione necessaria e sufficiente, ovvero $\rho(J) < 1$. Il polinomio caratteristico di J risulta

$$p(\lambda) = (\lambda - k)(-\lambda^2 - k\lambda + 2k^2),$$

e gli autovalori sono $\lambda_{1,2} = k$ e $\lambda_3 = -2k$. Quindi il metodo è convergente se $|k| < 1/2$. Si noti che in questo caso, la condizione sufficiente per la convergenza, ovvero la predominanza diagonale di A risulta anche essere una condizione necessaria.

b) Nel caso generale risulta $A = (1-k)I + k\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T$, da cui $D = I$ ed $B + C = -k\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T + kI$, per cui $J = k(I - \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T)$. Gli autovalori di J hanno allora la forma

$$\lambda(J) = k(1 - \lambda(\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T)).$$

Poiché la diade $\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T$ ha come autovalori 0 ed n, gli autovalori di J sono k e $(1-n)k$. Da cui abbiamo che il metodo di Jacobi converge se e solo se $|k| < 1/(n-1)$.

4.2.7 È dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Si dimostri che i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel risultano convergenti.

b) Si calcoli $\rho(J)$ e $\rho(G)$, dove J e G indicano le matrici di iterazione dei due metodi. Cosa si può dedurre circa la velocità di convergenza dei due metodi?

b) Si dimostri che il metodo ottenuto ponendo $A = M - N$, con

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

non risulta convergente. (18/12/2001)

Soluzione

a) I due metodi risultano convergenti perché la matrice A è una matrice a predominanza diagonale in senso stretto per colonne.

b) Risulta

$$J = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad G = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

I due polinomi caratteristici sono

$$p_J(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda \qquad \text{e} \qquad p_G(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{1}{3}\lambda^2.$$

Gli autovalori di J sono 0 e $\pm 1/\sqrt{3}$, e quindi $\rho(J) = 1/\sqrt{3}$. Gli autovalori di G sono 0 (di molteplicità 2) e $1/3$, e quindi $\rho(G) = 1/3$. Poiché $\rho(G) < \rho(J)$, il metodo di Gauss-Seidel converge più velocemente di quello di Jacobi. Si può notare che $\rho(G) = \rho^2(J)$.

c) Per la matrice di iterazione P risulta

$$P = M^{-1}N = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det P = -2$, non è possibile che gli autovalori di P abbiano tutti modulo minore di 1 e quindi che il metodo risulti convergente.

4.2.8 Si consideri il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = P\boldsymbol{x}^{(k)} + \boldsymbol{q}, \quad \text{dove} \quad P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{q} \in \mathbf{R}^3.$$

a) Si determinino $p_1 = \|P\|_\infty$ e $p_2 = \|P^2\|_\infty$.

b) Sfruttando i valori p_1 e p_2, si dia una limitazione per $\rho(P)$ e $\rho(P^2)$.

c) Sfruttando la limitazione per $\rho(P^2)$, si dia una limitazione per $\rho(P)$. Si può concludere adesso che il metodo iterativo è convergente?

d) A conferma di quanto trovato al punto precedente si calcolino gli autovalori di P (uno degli autovalori è uguale a 1/4). (18/12/2003)

Soluzione

a) Per la matrice P risulta $p_1 = \|P\|_\infty = 5/4$. La matrice P^2 risulta

$$P^2 = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & -6 & -3 \end{bmatrix},$$

e quindi $p_2 = \|P^2\|_\infty = 13/16$.

b) Poiché per una qualsiasi norma matriciale vale $\rho(P) \le \|P\|$, abbiamo $\rho(P) \le p_1 = 5/4$ e $\rho(P^2) \le p_2 = 13/16$.

c) Poiché gli autovalori di P^2 sono il quadrato degli autovalori di P abbiamo che

$$\rho(P^2) = \rho^2(P),$$

da cui otteniamo che

$$\rho(P) = \sqrt{\rho(P^2)} \le \sqrt{\frac{13}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4} < 1.$$

Poiché $\rho(P) < 1$, il metodo iterativo risulta convergente.

d) Il polinomio caratteristico di P risulta

$$\det(P - \lambda I) = -\lambda^3 = \frac{5}{4}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda + \frac{5}{64}$$

e ha come radici $\lambda_1 = 1/4; \lambda_2 = 1/2 + i/4$ e $\lambda_3 = 1/2 - i/4$. Poiché tutti gli autovalori in modulo sono minori di 1 il metodo iterativo risulta convergente.

4.2.9 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Sapendo che uno degli autovalori è uguale a 1 si determinino gli altri due.

b) Si consideri il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = (I - \frac{1}{m} A)\, \boldsymbol{x}^{(k)} + \frac{\boldsymbol{b}}{m}.$$

Si dica per quali valori di m il metodo è convergente e qual è il sistema lineare di cui è soluzione $\widehat{\boldsymbol{x}} = \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{x}^{(k)}$.

c) Si determini il valore di m per cui il raggio spettrale della matrice di iterazione è minimo. (17/1/2003)

Soluzione

a) Il polinomio caratteristico di A risulta

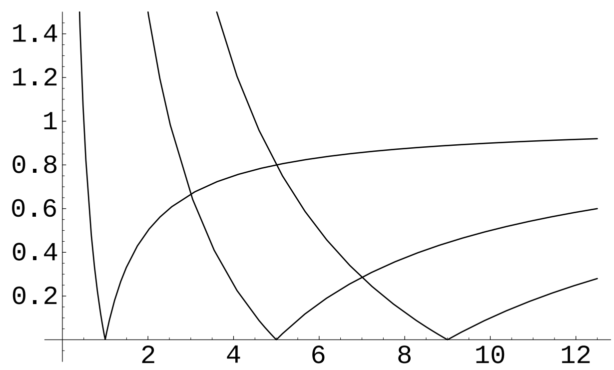
$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 59\lambda + 45.$$

Poiché la radice $\lambda = 1$ è nota, possiamo trovare le altre due dividendo $p(\lambda)$ per $\lambda - 1$. Il polinomio quoziente risulta $-\lambda^2 + 14\lambda - 45$ che ha come radici $\lambda = 5$ e $\lambda = 9$.

b) Gli autovalori di $P = I - \frac{1}{m}A$ hanno la forma $1 - \lambda/m$, dove λ è un autovalore di A. Quindi gli autovalori di P risultano $1 - 1/m$, $1 - 5/m$ e $1 - 9/m$. Il metodo iterativo è convergente se e solo se $\rho(P) < 1$, dove

$$\rho(P) = \max \left\{ \left|1 - \frac{1}{m}\right|,\ \left|1 - \frac{5}{m}\right|, \left|1 - \frac{9}{m}\right| \right\} < 1.$$

La seguente figura mostra i moduli degli autovalori al variare di m (in ascissa)



Il raggio spettrale è quindi dato da

$$\rho(P) = \begin{cases} 1 - \dfrac{9}{m} & \text{per} \quad m < 5, \\ \dfrac{1}{m} - 1 & \text{per} \quad m \geq 5, \end{cases}$$

e risulta $\rho(P) < 1$ se $m > 9/2$.

Per tali valori di m il metodo converge al vettore $\widehat{\boldsymbol{x}}$ tale che

$$\widehat{\boldsymbol{x}} = (I - \frac{1}{m} A)\, \widehat{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{b}}{m},$$

e quindi tale che $A\,\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}$.

c) Il raggio spettrale è minimo per $1 - \dfrac{9}{m} = \dfrac{1}{m} - 1$, cioè per $m = 5$.

4.3 Esercizi proposti

4.3.1 La disuguaglianza $|\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|\, \|\boldsymbol{y}\|$ non vale per tutte le norme.

a) La si verifichi per la norma 2 in $\mathbf{R}^2$.

b) La si verifichi per la norma 1 tenendo conto delle relazioni fra norma 2 e norma 1.

c) Si dia un controesempio in $\mathbf{R}^2$ che dimostri che la relazione non vale in norma infinito. (7/2/2008)

4.3.2 Siano $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ due vettori di $\mathbf{R}^n$, con $n \geq 2$.

a) Si verifichi che non valgono le relazioni

$$|\boldsymbol{u}^T \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|_\infty\, \|\boldsymbol{v}\|_\infty, \quad \|\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T\|_\infty \leq \|\boldsymbol{u}\|_\infty\, \|\boldsymbol{v}\|_\infty.$$

Oltre alle operazioni di prodotto interno ed esterno di vettori, si potrebbe pensare di definire anche un'operazione di "prodotto componente per componente" nel modo seguente

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} \odot \boldsymbol{v}, \quad \text{di componenti } z_i = u_i\, v_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

b) Si verifichi che vale la relazione

$$\|\boldsymbol{u} \odot \boldsymbol{v}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{u}\|_\infty\, \|\boldsymbol{v}\|_\infty. \quad (18/1/2006)$$

4.3.3 Si consideri la funzione $f \,:\, \mathbf{R}^n \,\to\, \mathbf{R}$ così definita

$$f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\Big[\, \min_{i=1,\ldots,n} |x_i| + \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| \,\Big].$$

a) Si dimostri che per $n = 2$ la funzione è una norma.

b) Si verifichi, con un controesempio, che per $n > 2$ la funzione non è una norma. (21/12/2004)

4.3.4 Sia A una matrice $n \times n$. Si dimostri che per qualsiasi norma matriciale risulta

$$|\det A| \leq \|A\|^n.$$

(Suggerimento: si consideri $\rho(A)$.) (14/2/2002)

4.3.5 Sia $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$, con $n \geq 2$, e sia $\boldsymbol{a}_j \in \mathbf{R}^n$ la j-esima colonna di A. Si dimostri che la funzione $\varphi(A) = \max_j \|\boldsymbol{a}_j\|_2$ non definisce una norma matriciale. (6/6/2002)

4.3.6 Si individuino tutte le matrici $A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ tali che risulti contemporaneamente

$$\|A\boldsymbol{x}\|_1 = \|\boldsymbol{x}\|_1 \quad \text{e} \quad \|A\boldsymbol{x}\|_\infty = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$$

per ogni $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ (suggerimento: se la condizione vale per ogni $\boldsymbol{x}$, vale in particolare per i due vettori canonici e la loro somma). (22/1/2002)

4.3.7 È data la matrice bidiagonale A di ordine $n \geq 3$ i cui elementi sono $a_{ii} = a_{i+1,i} = 1$ e il vettore $\boldsymbol{b}$ i cui elementi sono $b_i = 2$, per $i = 1, \ldots, n$.

a) Si calcoli la soluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

b) Si studi il condizionamento in norma ∞ della matrice A al variare di n. (7/2/2005)

4.3.8 Sia $A = \begin{bmatrix} 2 & -k \\ k & -2 \end{bmatrix}$. Si studi il numero di condizionamento di A al variare del parametro k

(a) in norma ∞, (b) in norma 2. (20/12/2005)

4.3.9 È data la matrice tridiagonale A di ordine 5 di elementi

$$a_{i,i} = \begin{cases} 2 \text{ se } i < 5, \\ 1 \text{ se } i = 5 \end{cases}, \quad a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -1.$$

a) Si calcolino, con il metodo di Gauss, $\det A$ e A^{-1}.

b) Si calcoli il numero di condizionamento di A in norma ∞.

c) Si generalizzi al caso di dimensione n e si dica come varia il condizionamento al crescere di n. (25/6/2008)

4.3.10 Sia A la matrice di ordine 5 i cui elementi diversi da zero sono

$$a_{i,i} = 1 \quad \text{e} \quad a_{i,i+1} = k, \quad \text{con} \quad 0 < k < 1.$$

a) Si scriva la matrice $A^T A$. Sfruttando i cerchi di Gerschgorin, si diano delle limitazioni inferiore e superiore degli autovalori di $A^T A$ al variare del parametro k.

b) Sfruttando le limitazioni precedenti, si dia una maggiorazione M del numero di condizionamento $\mu_2(A)$ in funzione di k. Vi sono valori di k per cui la matrice A è ben condizionata?

c) Indicati con λ_i, per $i = 1, \ldots, 5$ gli autovalori di $A^T A$, ordinati in modo crescente, si dica quanto vale il prodotto dei λ_i.

d) Sfruttando le limitazioni superiori trovate precedentemente per λ_i, $i = 2, \ldots, 5$, si dia una limitazione inferiore per λ_1.

(e) Si dia una maggiorazione del numero di condizionamento $\mu_2(A)$ indipendente da k. (22/12/2002)

4.3.11 È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ di ordine $n > 3$, in cui gli elementi di A sono

$$a_{i,j} = \begin{cases} \alpha & \text{se} \quad i = j, \\ \beta & \text{se} \quad |i-j| = 1, \\ \gamma & \text{se} \quad |i-j| = n-1, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

con α, β, $\gamma \neq 0$. Si dica qual è il numero di operazioni additive e moltiplicative richieste dal metodo di Gauss per calcolare la soluzione del sistema nell'ipotesi che non siano richiesti scambi di righe. (3/9/2008)

4.3.12 Una matrice $A \in \mathbf{R}^{2n\times 2n}$ ha la seguente struttura

$$A = \begin{bmatrix} D & P \\ Q & R \end{bmatrix},$$

dove D, P, Q, $R \in \mathbf{R}^{n\times n}$ e D è una matrice diagonale. Si dica quante operazioni moltiplicative sono richieste in generale per ridurre A in forma triangolare utilizzando il metodo di eliminazione di Gauss, nell'ipotesi che non sia necessario effettuare scambi di righe. (6/6/2002)

4.3.13 Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n\times n}$ è tale che $a_{ij} > 0$ se $i = j$ e se $i - j = 1$, $a_{ij} < 0$ se $i - j = -1$ e $a_{ij} = 0$ altrimenti.

a) Si dimostri che A può essere ridotta in forma triangolare mediante il metodo di eliminazione di Gauss senza che siano richiesti scambi di righe (suggerimento: si proceda per induzione su n).

b) Si dimostri che A ha determinante positivo. (26/6/2002)

4.3.14 È data la matrice $P = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Si trovino autovalori e autovettori di P.

b) Il metodo iterativo $\boldsymbol{x}^{(k)} = P\boldsymbol{x}^{(k-1)}$ è convergente?

c) Si calcoli la successione dei vettori $\boldsymbol{x}^{(k)} = P\boldsymbol{x}^{(k-1)}/\|P\boldsymbol{x}^{(k-1)}\|_\infty$, a partire da un generico vettore

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}, \quad \text{con} \quad x_1^{(0)} \neq x_2^{(0)}.$$

Si verifichi che la successione converge. Quale ne è il limite?

d) Si dia una spiegazione della discrepanza fra i risultati del punto a) e del punto c). (1/7/2005)

4.3.15 Sia $\boldsymbol{x}_{i+1} = P\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{q}$ un metodo iterativo per la risoluzione di un sistema lineare. Si dica (e lo si dimostri) se le seguenti proposizioni sono vere:

a) condizione necessaria affinché il metodo converga è che $|\mathrm{tr}(P)| < n$,

b) condizione sufficiente affinché il metodo converga è che $|\mathrm{tr}(P)| < n$.

c) Si esamini il caso particolare della matrice

$$P = \begin{bmatrix} 5/4 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \qquad (12/9/2006)$$

4.3.16 Sia P una matrice quadrata di ordine 10 avente tutti gli elementi di modulo minore o uguale a 1.

a) Si dimostri che il metodo iterativo $\boldsymbol{x}_{i+1} = \dfrac{1}{12} P\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{q}$ risulta convergente.

b) Sia $\hat{\boldsymbol{x}} = \lim \boldsymbol{x}_i$, sia $\boldsymbol{x}_0$ assegnato e sia $\boldsymbol{e}_i = \hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_i$. Si determini un intero $\overline{k}$ tale che per $k \geq \overline{k}$ risulti $\|\boldsymbol{e}_k\|_1 \leq \dfrac{1}{2}\|\boldsymbol{e}_0\|_1$. (22/1/2002)

4.3.17 Sia A una matrice quadrata di ordine n, con autovalori reali e positivi. Per risolvere il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ si vuole utilizzare il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (I - \omega A)\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b},$$

dove ω è un numero da scegliere in modo opportuno. La teoria garantisce che gli autovalori di $I - \omega A$ sono tutti e soli della forma $1 - \omega\lambda$ con λ autovalore di A.

a) Si dimostri che il metodo

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = (I - \omega A)\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b}$$

converge se e solo se per ogni autovalore λ di A risulta $|1 - \omega\lambda| < 1$.

b) Si dimostri che $|1 - \omega\lambda| < 1$ se e solo se $0 < \omega < 2/\lambda$.

c) Supposto che gli autovalori di A siano 1, 5, 10, 50, 100, quali sono i valori di ω che garantiscono la convergenza del metodo?

d) Si dimostri che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

ha autovalori reali e positivi. Si individuino dei valori di ω che garantiscano la convergenza del metodo. (19/7/2007)

4.3.18 È data la matrice

$$P = \begin{bmatrix} Q & Q \\ Q & Q \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica qual è il rango di P.

b) Si calcolino gli autovalori di P.

c) Si dica se esiste un vettore $\boldsymbol{x} \in R^4$ tale che $P = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}^T$.

d) Si dica se il metodo iterativo

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{b} - \frac{1}{4}P\boldsymbol{x}^{(k)}, \quad \boldsymbol{b} \in R^4,$$

è convergente. In tal caso si dica a cosa converge la successione dei vettori $\boldsymbol{x}^{(k)}$. (25/5/2004)

4.3.19 Siano P e Q matrici assegnate di ordine $n \geq 2$, e si consideri il metodo iterativo

$$X^{(k+1)} = P\,X^{(k)} + Q.$$

Quindi la successione $X^{(k)}$, $k \geq 0$, è formata da matrici di ordine n. Si dice che il metodo è convergente se esiste una matrice X^* di ordine n tale che $\lim_{k\to\infty} X^{(k)} = X^*$ per ogni scelta della matrice iniziale $X^{(0)}$.

a) Si diano delle condizioni di convergenza (suggerimento: si sfruttino i teoremi noti per le successioni di vettori).

b) Se il metodo è convergente, si dica quale è il limite.

c) Si consideri il caso particolare

$$P = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (24/7/2006)$$

4.3.20 Si calcoli il numero di moltiplicazioni ed il numero di divisioni necessarie per eseguire un passo del metodo di Jacobi. Stessa domanda per il metodo di Gauss-Seidel. (18/9/2002)

4.3.21 Si consideri il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica se il metodo di Jacobi è convergente.

b) Si dica se il metodo di Gauss-Seidel è convergente. (21/12/2004)

4.3.22 Per risolvere il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con A matrice triangolare superiore non singolare, si intende utilizzare il metodo di Jacobi.

a) Si dimostri che il metodo risulta convergente.

b) Si applichi il metodo, calcolandone alcune iterate a partire da $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$, nel caso particolare

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}. \qquad (16/7/2002)$$

4.3.23 Si vuole risolvere un sistema lineare con matrice A quadrata di ordine n avente elementi diagonali non nulli. Si pone $A = D - B - C$, ove D, B e C sono definite come per i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel. Si intende utilizzare il metodo iterativo avente matrice di iterazione $P = M^{-1}N$, dove $M = \frac{1}{2}D - B$ e $N = -\frac{1}{2}D + C$

a) Perché si deve assumere che gli elementi diagonali di A siano non nulli?

b) Si calcoli $\det P$.

c) Si studi la convergenza del metodo. (14/2/2002)

4.3.24 È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica se il metodo di Jacobi, applicato al sistema, è convergente.

b) Si dica se il metodo di Gauss-Seidel, applicato al sistema, è convergente.

c) Se entrambi i metodi risultassero convergenti, si dica quale dei due sarebbe più veloce.

d) Si calcolino le prime due iterate del metodo di Gauss-Seidel assumendo come vettore iniziale $\boldsymbol{x}^{(0)} = \mathbf{0}$. (17/12/2003)

4.3.25 È data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} B & B \\ O & B \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica se il metodo di Jacobi, applicato ad un sistema con matrice A, è convergente.

b) Si dica se il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

c) Se entrambi i metodi risultassero convergenti, si dica quale dei due sarebbe più veloce.

d) Si consideri la decomposizione $A = M - N$, dove

$$M = \begin{bmatrix} B & O \\ O & B \end{bmatrix}.$$

Si dica se il metodo iterativo, la cui matrice di iterazione è $P = M^{-1}N$, è convergente. (20/1/2004)

4.3.26 Si consideri il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica se il metodo di Jacobi è convergente.

b) Si dica se il metodo di Gauss-Seidel è convergente.

c) Se entrambi i metodi convergono, quale dei due è preferibile?

d) Siano

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad N = M - A.$$

Si verifichi che il metodo iterativo $\boldsymbol{x}^{(k+1)} = M^{-1}N\boldsymbol{x}^{(k)} + M^{-1}\boldsymbol{b}$ non è convergente. (20/12/2005)

4.3.27 È data la matrice

$$C = \begin{bmatrix} A+B+I & B \\ B & A+B-I \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 \\ 1/4 & 0 \end{bmatrix},$$

ed I è la matrice identica di ordine 2.

a) Si verifichi che l'equazione caratteristica di C è biquadratica.

Senza calcolare gli autovalori, si dimostri che

b) se λ è autovalore di C, anche $-\lambda$ lo è,

c) C ha un autovalore uguale al suo raggio spettrale $\rho(C)$,

d) esistono due costanti α e β, con $0 < \alpha < \beta$ tali che $\alpha \le \rho(C) \le \beta$.

e) Si dica se i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel possono essere applicati ad un sistema con matrice C. (15/6/2004)

4.3.28 Siano

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \beta & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

a) Si dica per quali valori dei parametri α e β il metodo di Gauss senza pivot può essere applicato alla risoluzione del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ e per tali valori si applichi il metodo di Gauss calcolando la soluzione $\boldsymbol{x}$.

b) Si dica per quali valori di α e β i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel sono convergenti. (15/9/2004)

4.3.29 Per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 2 \end{bmatrix},$$

si utilizzano i due seguenti metodi iterativi

a) metodo di Jacobi,

b) metodo $\boldsymbol{x}^{(k)} = \dfrac{1}{2}\, M^{-1}\boldsymbol{b} + M^{-1}N\boldsymbol{x}^{(k-1)}$, dove

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si studi la convergenza dei due metodi e si dica come va applicato in pratica il secondo metodo. Quale dei due è preferibile? (9/6/2005)

4.3.30 Sia A la matrice di ordine 4 di elementi $a_{ij} = (-1)^{i+j}$, con $i, j = 1, \ldots, 4$, e $B = 5I + A$, con I la matrice identica di ordine 4.

a) Si dica se gli autovalori di B sono reali e positivi.

b) Si determini il rango di A e Si dica direttamente quali sono i suoi autovalori.

c) Si dica che relazione c'è fra gli autovalori di A e quelli di B, e quindi quali sono gli autovalori di B.

d) Si dica se un sistema lineare con matrice B è risolubile e se la soluzione può essere calcolata con il metodo di Jacobi. (28/6/2007)

4.3.31 Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

.

a) Si verifichi che $e = [1, 1, 1, 1]^T$ è autovettore di A e si dica a quale autovalore λ è associato.

b) Si determini una limitazione inferiore ed una superiore per il modulo degli autovalori di A.

c) Si dimostri che $\rho(A) = \lambda$.

d) Si dica se il metodo di Jacobi applicato ad un sistema con matrice A risulta convergente. (13/9/2007)

4.3.32 È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ in cui

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Si verifichi che il sistema ha una e una sola soluzione.

b) Si costruiscano le matrici J e G di iterazione di Jacobi e di Gauss-Seidel e se ne determinino gli autovalori.

c) Si dica quale dei due metodi è il migliore, cioè converge più velocemente. (11/7/2008)

4.3.33 È dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^4$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica per quali $k \in \mathbf{R}$ il metodo di Jacobi è applicabile al sistema e per quali è convergente.

b) Si consideri il sistema ottenuto da quello dato scambiando fra di loro la seconda e la terza equazione. Si risponda alla domanda del punto a) per questo nuovo sistema.

c) Si consideri il sistema ottenuto da quello dato scambiando fra di loro la prima e la quarta equazione. Si risponda alla domanda del punto a) per questo nuovo sistema. (10/2/2004)

4.3.34 È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & -2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}.$$

a) Per quali valori reali del parametro k i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel convergono?

b) Esistono valori di k per cui un metodo è convergente e l'altro no?

c) Per un valore di k per cui entrambi i metodi convergono, quale dei due è preferibile? (21/7/2005)

4.3.35 È dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica se il metodo di Jacobi è convergente.

b) Si dica se il metodo di Gauss Seidel è convergente.

c) Si consideri la decomposizione additiva $A = M - N$ con

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \boldsymbol{R},$$

e si dica se esistono valori di k per i quali il metodo iterativo corrispondente risulta convergente. (12/9/2005)

4.3.36 Per la risoluzione del sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}, \quad k \neq 0,$$

si utilizzano i metodi iterativi di Jacobi e Gauss-Seidel.

a) Esistono valori di k per cui uno dei due metodi è convergente e l'altro no?

b) Scelto un valore di k per cui entrambi i metodi sono convergenti, si dica quale converge più rapidamente. (3/7/2006)

4.3.37 Sono date le due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1.5 & 2 & 1.5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Si dica se A ha predominanza diagonale per righe.

b) Si dica se la matrice $T = SAS^{-1}$ ha predominanza diagonale per righe.

c) Si dica se il metodo iterativo di Jacobi applicato ad un sistema con matrice T è convergente.

d) Indicate con J_A e J_T le matrici di iterazione di Jacobi relative alle matrici A e T, si dimostri che

$$J_T = SJ_AS^{-1}.$$

e) Si dica se il metodo iterativo di Jacobi applicato ad un sistema con matrice A è convergente. (18/1/2006)

4.3.38 Sia A la matrice di ordine 3 i cui elementi sono tutti uguali a 1 e $\boldsymbol{b}$ il vettore di ordine 3 i cui elementi sono tutti uguali a 3.

a) Si calcoli $\det A$.

b) Si determini l'insieme delle soluzioni del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

c) Si scriva il metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema e se ne studi la convergenza.

d) Si calcolino le prime due iterazioni a partire dal vettore $\boldsymbol{x}^{(0)} = [1,\ 1/3,\ 1/3]^T$.

e) Si commenti il risultato ottenuto in d) tenendo conto di quello ottenuto in c). (12/6/2006)

4.3.39 Sia $k \in \mathbf{R}$ e si consideri la matrice $A \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ di elementi

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ -k & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Si individui l'insieme $\mathcal{I}_1$ dei k per cui A ha predominanza diagonale in senso stretto.

b) Si individui l'insieme $\mathcal{I}_2$ dei k per cui il metodo di Gauss-Seidel, applicato ad un sistema avente A come matrice, sia convergente. Quale dei due insiemi contiene l'altro?

c) Per $k = 1/2$ si calcolino le prime due iterate $\boldsymbol{x}^{(1)}$ e $\boldsymbol{x}^{(2)}$ con il metodo di Gauss-Seidel nel caso che il termine noto sia il vettore $\boldsymbol{b}$ di componenti tutte uguali a 1 e il vettore iniziale $\boldsymbol{x}^{(0)}$ sia il vettore di componenti tutte uguali a 0. (20/12/2007)

4.3.40 È assegnata la matrice $A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Si applichi ad A l'eliminazione gaussiana senza scambi di righe ottenendo una matrice triangolare superiore M. Si verifichi che $\det A = \det M$.

b) Si determini per quale N risulta $A = M - N$. Si calcoli la matrice $P = M^{-1}N$.

c) Si calcolino le matrici di iterazione G di Gauss-Seidel e J di Jacobi.

d) Si calcolino i raggi spettrali di P, G e J. Cosa si deduce circa la convergenza dei metodi di Jacobi, di Gauss-Seidel e del metodo con matrice di iterazione P? (15/1/2007)

4.3.41 È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbf{R}.$$

Si esamini la convergenza dei tre seguenti metodi iterativi

a) metodo di Jacobi, b) metodo di Gauss-Seidel,

c) metodo la cui matrice di iterazione è $M^{-1}N$, dove $A = M - N$ e M è la matrice ottenuta dalla A ponendo $\alpha = 0$. (17/1/2008)

4.3.42 Siano n, k maggiori di 1 e sia A la matrice di ordine n definita da

$$A = k\, I_n + \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}^T + \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}_1^T - 2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^T,$$

dove I_n è la matrice identica di ordine n, $\boldsymbol{e}_1$ è il primo vettore della base canonica di ordine n, $\boldsymbol{e}$ è il vettore di ordine n di componenti tutte uguali a 1.

a) Si costruisca la matrice G di iterazione del metodo di Gauss-Seidel.

b) Si dica qual è il rango di G e se ne determinino gli autovalori.

c) Si dica se esistono valori di k per cui il metodo di Gauss-Seidel sia convergente. (9/6/2008)

4.3.43 È assegnata la matrice quadrata di ordine $2n$

$$A = \begin{bmatrix} I & F \\ G & I \end{bmatrix},$$

dove I è la matrice identica di ordine n e F, G sono generiche matrici di ordine n.

a) Si studi la convergenza del metodo nel caso in cui $||F||_1 < 1$ e $||G||_1 < 1$.

b) Si supponga di voler risolvere un sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Quante operazioni moltiplicative sono necessarie per eseguire un passo del metodo di Jacobi?

c) Quante operazioni moltiplicative sono necessarie per ridurre A in forma triangolare con il metodo di eliminazione di Gauss supponendo che non sia necessario effettuare scambi di righe?

d) Si esegua la riduzione, senza effettuare scambi di righe, nel caso particolare $n = 2$, $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $F = -G$.

e) Si congettura che $\det A = \det I \det I - \det F \det G$. È vero che il caso particolare del punto precedente smentisce questa congettura? (19/12/2006)