Capitolo 5

INTERPOLAZIONE POLINOMIALE

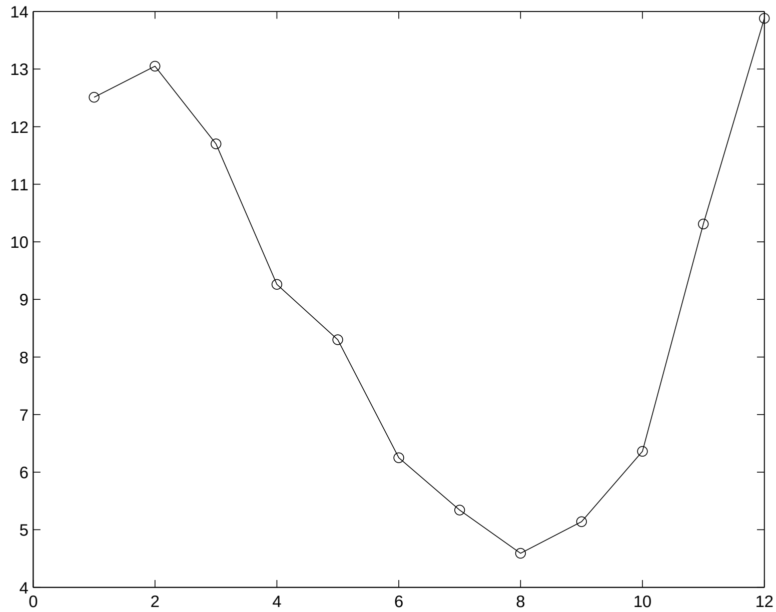
Un problema che frequentemente si presenta in matematica applicata è quello dell'*approssimazione* di funzioni, che consiste nel determinare una funzione g, appartenente ad una classe prescelta di funzioni, che meglio approssima una funzione data f. Nel caso *discreto*, che esamineremo qui, la funzione f è nota su un insieme di $n + 1$ *nodi* $x_0, x_1, \ldots, x_n$, appartenenti ad un intervallo $[a, b]$. Questo è un caso caratteristico dell'analisi di dati sperimentali: talvolta il numero $n + 1$ di dati disponibili è piccolo, come nello studio di certi fenomeni fisici o biologici, talvolta è elevato, come nelle analisi statistiche. Si può anche supporre che i valori $f(x_i)$, in particolare quando sono rilevati in laboratorio, siano affetti da errori di misura. La funzione g che si costruisce serve per approssimare valori della f in punti diversi dai nodi o per dedurne proprietà di comportamento.

Al caso discreto può essere ricondotto anche il caso *continuo*, in cui la funzione f è una funzione nota della matematica, in generale non razionale. Lo scopo è quello di produrre una funzione g più semplice, cioè più facilmente "trattabile" (ad esempio più facilmente calcolabile, derivabile o integrabile) della f. In questo caso i nodi sono scelti in modo opportuno e i valori $f(x_i)$ sono calcolati con elevata accuratezza, sfruttando le proprietà note della funzione f.

5.1 Esempio.

I seguenti dati si riferiscono alla portata d'acqua di un fiume italiano, misurata mensilmente in m^3/sec.

mese	G	F	M	A	M	G	L	A	S	O	N	D
portata	12.5	13.1	11.7	9.3	8.3	6.3	5.3	4.6	5.1	6.4	10.3	13.9



Supponiamo che le misure siano state prese tutte il primo del mese. Ci chiediamo quale è stata la portata d'acqua il 10 di maggio o il 15 di luglio. La risposta più ovvia è quella di cercare il valore corrispondente sulla spezzata. In pratica in ogni intervallo la funzione incognita che descrive la portata d'acqua viene approssimata con un polinomio lineare, il cui grafico è il segmento congiungente due punti consecutivi. È possibile ottenere delle stime migliori se invece che prendere in considerazione solo i due dati più vicini si utilizza un maggior numero di dati, ed eventualmente tutti i dati a disposizione, tenendo conto dell'andamento complessivo della funzione? Questa domanda può essere formulata anche così: esistono approssimazioni di una funzione migliori dell'approssimazione lineare?

Noi esamineremo qui il caso dell'approssimazione *polinomiale*: la funzione g con cui si vuole approssimare la funzione f è un polinomio di grado opportuno, i cui coefficienti vengono determinati in modo che l'approssimazione sia la migliore possibile, compatibilmente con i dati che si hanno a disposizione. Per rendere formalmente corretta questa espressione "la migliore possibile", occore definire come si misura la distanza fra la funzione f e la funzione g. La funzione g sarà poi determinata in modo da avere la minima distanza possibile dalla funzione f.

Nel caso del problema discreto che stiamo considerando, la distanza fra la f e la g viene misurata per mezzo del vettore $\mathbf{r}$ degli *scarti*, cioè delle differenze

$$r_i = f(x_i) - g(x_i), \quad \text{per} \quad i = 0, \ldots, n.$$

I coefficienti cercati sono quelli che rendono minima la lunghezza euclidea del vettore $\mathbf{r}$. Il metodo corrispondente viene detto dei *minimi quadrati*.

5.2 Il problema dell'interpolazione.

Un caso particolarmente importante del problema dei minimi quadrati è quello in cui $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. In questo caso il polinomio g, che più propriamente viene chiamato *polinomio di interpolazione*, soddisfa la condizione $g(x_i) = f(x_i)$, per $i = 0, \ldots, n$. Vale il seguente teorema.

5.3 Teorema.

Se $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, esiste ed è unico il polinomio

$$p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

di grado al più n, tale che

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

p_n è quindi il polinomio di interpolazione della funzione f.

Dim. Un metodo per calcolare il vettore $\mathbf{a} = [a_0, a_1, \ldots, a_n]^T$ dei coefficienti del polinomio p_n è il seguente. Si considerano il vettore $\mathbf{f} = [f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)]^T$ e la matrice V, detta matrice di *Vandermonde*, così definita

$$v_{ij} = x_{i-1}^{n-j+1}, \quad i = 1, \ldots n+1, \; j = 1, \ldots, n+1.$$

Imponendo che p_n verifichi le $n+1$ condizioni (1) si ottiene il sistema lineare di $n+1$ equazioni in $n+1$ incognite

$$V\mathbf{a} = \mathbf{f}. \tag{2}$$

La matrice di Vandermonde è non singolare, in quanto

$$\det\ V = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{n} (x_i - x_j),$$

e i punti x_i sono per ipotesi a due a due distinti. Ne segue che il sistema (2) ha una e una sola soluzione e quindi il polinomio p_n esiste ed è unico. ■

5.4 La formula di Lagrange per il polinomio di interpolazione.

Solo raramente del polinomio di interpolazione sono richiesti i coefficienti, in generale ciò che si vuole è il valore di p_n in uno o più punti. In tal caso non è conveniente risolvere il sistema (2) che richiederebbe un numero di operazioni moltiplicative dell'ordine di $n^3/3$.

Più conveniente dal punto di vista del costo computazionale è esprimere il polinomio di interpolazione (che ricordiamo è unico) con seguente formula di *Lagrange*

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x), \quad \text{dove} \quad L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}. \tag{3}$$

Per controllare che il polinomio così scritto verifichi le (1), notiamo che

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e quindi

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) L_j(x_i) = f(x_i), \quad k = 0, \dots, n.$$

Il numero di operazioni richieste per calcolare $p_n(x)$ in corrispondenza ad un valore $x \neq x_i$ è dell'ordine di n^2.

Nel caso più semplice, quando $n = 1$, il polinomio di grado al più 1 che assume nei punti x_0, x_1, distinti tra loro, rispettivamente i valori $f(x_0)$, $f(x_1)$ è il seguente

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{1}{h} \big(f(x_1)(x - x_0) - f(x_0)(x - x_1) \big), \quad \text{dove} \quad h = x_1 - x_0. \end{aligned}$$

Il polinomio p_1 ha come grafico il segmento che congiunge i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$.

5.5 Esempio.

Si supponga di voler approssimare la funzione $\log_{10}(x)$ con il polinomio di interpolazione di grado massimo 2, ottenuto considerando i nodi $x_0 = 10^{-1}$, $x_1 = 1$, $x_2 = 10$. I suoi coefficienti sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10^{-2} & 10^{-1} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10^2 & 10 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La soluzione è $\mathbf{a} = [-10/99 \;\; 11/9 \;\; -111/99]^T$, e quindi il polinomio è:

$$p_2(x) = -\frac{10}{99}x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{111}{99}.$$

Se interessa il valore $p_2(2) = 91/99$, lo si può ottenere più velocemente con la formula di Lagrange, che dà:

$$L_0(2) = \frac{2-1}{10^{-1}-1}\frac{2-10}{10^{-1}-10} = -\frac{800}{891},$$

$$L_1(2) = \frac{2-10^{-1}}{1-10^{-1}}\frac{2-10}{1-10} = \frac{152}{81},$$

$$L_2(2) = \frac{2-10^{-1}}{10-10^{-1}}\frac{2-1}{10-1} = \frac{19}{891},$$

e dunque

$$p_2(2) = -1 \cdot L_0(2) + 0 \cdot L_1(2) + 1 \cdot L_1(2) = \frac{91}{99}.$$

5.6 Resto dell'interpolazione.

Si definisce *resto* dell'interpolazione di f con il polinomio p_n la funzione

$$r(x) = f(x) - p_n(x).$$

Il resto misura l'errore che si commette quando si approssima f con p_n. Chiaramente $r(x)$ è nullo nei nodi x_i. Per valori di x diversi dai nodi, il resto può essere abbastanza grande, in modulo, da rendere poco accurata l'approssimazione di f con p_n. Nell'esempio 5.5 si ha $p_2(2) = 91/99 = 0.9191..$, ma $\log_{10}(2) = 0.3010....$ Vale il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione.

5.7 Teorema.

Posto $a = \min_{i=0,\ldots,n} x_i$ *e* $b = \max_{i=0,\ldots,n} x_i$, *se* $f \in C^{n+1}[a,b]$, *esiste un punto* $\xi = \xi(x) \in (a,b)$, *tale che*

$$r(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

■

Nel caso $n = 1$, supponendo $x_0 \le x \le x_1$, il resto è dato da

$$r(x) = (x - x_0)(x - x_1)\,\frac{f''(\xi)}{2}\,, \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Posto $M_2 = \max\limits_{x \in (x_0, x_1)} |f''(x)|$ e $h = x_1 - x_0$, si ha

$$\max_{x \in (x_0, x_1)} |(x - x_0)(x - x_1)| = \frac{h^2}{4} \quad \text{e} \quad |r(x)| \le \frac{M_2 h^2}{8}\,.$$

Per $n = 2$, supponendo $x_0 < x_1 < x_2$ e $x_0 \le x \le x_2$, il resto è dato da

$$r(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,\frac{f'''(\xi)}{6}\,, \quad \xi \in (x_0, x_2).$$

Posto $M_3 = \max\limits_{x \in (x_0, x_2)} |f'''(x)|$, si ha

$$|r(x)| \le \max_{x \in (x_0, x_2)} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|\,\frac{M_3}{6}\,.$$

In particolare nell'esempio 4.4, in cui $f(x) = \log_{10} x$, è $f'''(x) = \dfrac{2\log_{10} \mathrm{e}}{x^3}$, e quindi $M_3 = 2000 \log_{10} \mathrm{e}$, si ha quindi

$$|r(2)| \le |(2 - \frac{1}{10})(2 - 1)(2 - 10)|\,\frac{2000 \log_{10} \mathrm{e}}{6} = 2200.4\ldots \quad .$$

Poichè $r(2) = -0.618\ldots$, l'esempio mostra come dal teorema 5.7 si possono ottenere limitazioni molto più grandi dei valori effettivi del resto in modulo, quando la derivata $f^{(n+1)}$ ha grandi variazioni nell'intervallo di interpolazione.

5.8 Esempio.

Esaminiamo un altro esempio. Per approssimare la radice quadrata di un numero x, che non sia un quadrato perfetto, si può procedere nel modo seguente: si considerano le radici quadrate dei due numeri x_0 e x_1 più vicini a x, che siano quadrati perfetti, e si costruisce il polinomio di interpolazione che in x_i assume il valore $\sqrt{x_i}$, per $i = 0, 1$. La radice cercata viene approssimata con il valore assunto dal polinomio di interpolazione in x. Approssimiamo con questa tecnica $\sqrt{0.6}$. Se si considerano come nodi $x_0 = 0.49$, $x_1 = 0.64$, si ottiene

$$p_1(x) = \frac{2}{3}x + \frac{28}{75}, \quad p_1(0.6) = \frac{58}{75} = 0.7733\ldots \quad .$$

Poiché $\sqrt{0.6} = 0.77459\ldots$, abbiamo ottenuto un'approssimazione che ha esatte le prime due cifre. Proviamo ad aumentare il numero dei nodi: ponendo $x_0 = 0.49$, $x_1 = 0.64$, $x_2 = 0.81$, si ottiene

$$p_2(x) = -\frac{25}{102}x^2 + \frac{385}{408}x + \frac{126}{425}, \quad p_2(0.6) = \frac{2633}{3400} = 0.7744\ldots \quad .$$

Adesso l'approssimazione ha tre cifre esatte. Aumentiamo ancora il numero dei nodi, scegliendo $x_0 = 0.36$, $x_1 = 0.49$, $x_2 = 0.64$, $x_3 = 0.81$ e ottenendo

$$p_3(x) = \frac{1250}{4641}x^3 - \frac{2375}{3094}x^2 + \frac{11831}{9282}x + \frac{252}{1105}, \quad p_3(0.6) = \frac{856}{1105} = 0.77466\ldots \quad .$$

$p_3(0.6)$ è un'approssimazione ancora migliore di $p_2(0.6)$.

5.9 Proprietà del resto.

Per quanto visto finora sembra di poter concludere che all'aumentare del numero dei nodi il polinomio di interpolazione fornisca approssimazioni sempre migliori. Prima di poter fare una simile affermazione, conviene studiare più accuratamente il resto. Posto

$$M_{n+1} = \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|,$$

si ha

$$r_{\max} = \max_{x\in[a,b]} |r(x)| \le \max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)| \; \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}.$$

Per semplicità consideriamo il caso di nodi x_i equidistanti con passo h, cioè $x_i = x_0 + ih$, per $i = 0, \ldots, n$. Ponendo $x = x_0 + th$, si ha

$$r_{\max} \le \max_{t\in[0,n]} |\pi_n(t)| \; h^{n+1} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{dove} \quad \pi_n(t) = t(t-1)\cdots(t-n).$$

Se $f^{(n+1)}$ non varia molto nell'intervallo $[a, b]$ si può avere un'idea del comportamento del resto studiando il comportamento del polinomio $\pi_n(t)$, i cui zeri sono $0, \ldots, n$. Possiamo quindi disegnare il grafico di $\pi_n(t)$, ad esempio per $n = 5$ e $n = 8$.

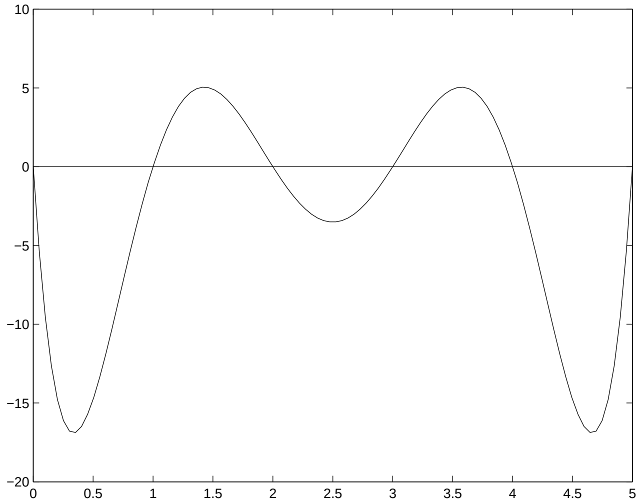


Grafico di $\pi_5(t)$ per $t \in [0, 5]$.

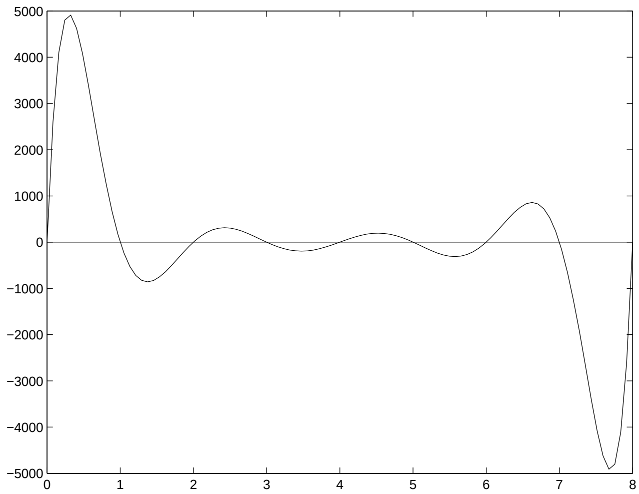


Grafico di $\pi_8(t)$ per $t \in [0, 8]$.

È facile constatare che il punto $n/2$ è punto di simmetria per $|\pi_n(t)|$ e che i massimi relativi di $|\pi_n(t)|$ in ogni intervallo $(i, i + 1)$ crescono quando ci si allontana dal centro dell'intervallo $[0, n]$ verso gli estremi. Quindi se $f^{(n+1)}$ non varia molto nell'intervallo $[a, b]$, il resto risulta minore nella parte centrale dell'intervallo. Si può dimostrare che il massimo di $|\pi_n(t)|$, che viene assunto nel primo e nell'ultimo sottointervallo, al crescere di n cresce in maniera esponenziale. Lo studio del comportamento del resto suggerisce perciò di utilizzare il polinomio di interpolazione per approssimare f solo per valori bassi del grado n e per punti x che si trovino nella parte centrale dell'intervallo $[a, b]$.

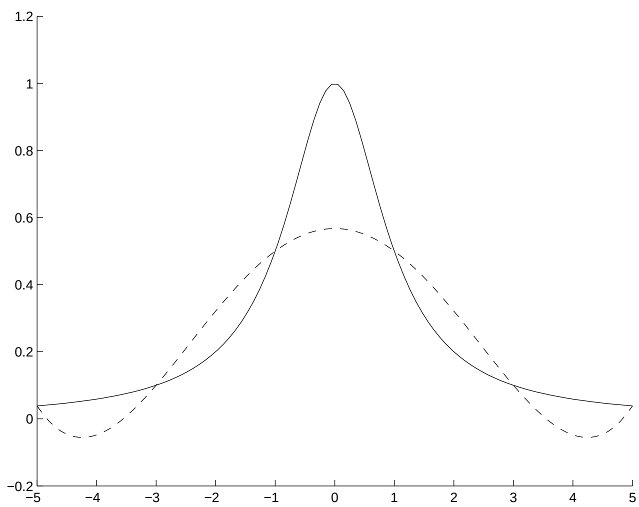
Si potrebbe pensare che la presenza del fattore $h^{n+1}/(n+1)!$ nell'espressione del resto faccia comunque diminuire $r_{\max}$ al crescere di n, ma questo non è sempre vero: la convergenza a zero di $r_{\max}$ dipende da come cresce M_{n+1}. Vi sono infatti esempi di funzioni f, anche infinitamente derivabili, per le quali la successione $\{p_n(x)\}$ dei valori assunti dal polinomio di interpolazione di grado n in un punto $x \in (a, b)$ non converge a $f(x)$ per n che tende all'infinito. Consideriamo ad esempio la seguente funzione di *Runge*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}\,, \qquad x \in [a, b] = [-5, 5].$$

Sia p_n il polinomio di interpolazione sui nodi $x_i = a+i(b-a)/n$, $i = 0, \ldots, n$. Per $n = 5$ si ha

$$p_5(x) = \frac{1}{520}x^4 - \frac{9}{130}x^2 + \frac{59}{104},$$

(il grado effettivo è 4 perché la funzione è pari e quindi anche il polinomio) e si ottiene il grafico della figura seguente, in cui il polinomio p_5 (linea tratteggiata) è plottato rispetto alla funzione f (linea spessa).

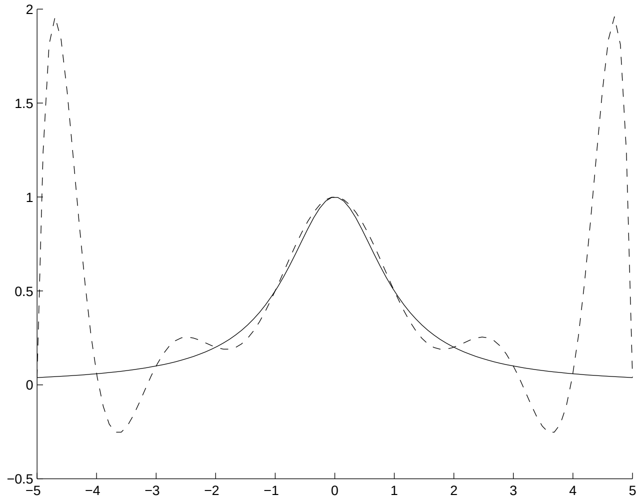


Polinomio di interpolazione di grado 5 della funzione di Runge.

Ripetiamo il calcolo con $n = 10$. Si ottiene il polinomio

$$p_{10}(x) = -\frac{1}{44200}x^{10} + \frac{7}{5525}x^8 - \frac{83}{3400}x^6 + \frac{2181}{11050}x^4 - \frac{149}{221}x^2 + 1,$$

il cui grafico è riportato nella figura seguente.



Polinomio di interpolazione di grado 10 della funzione di Runge.

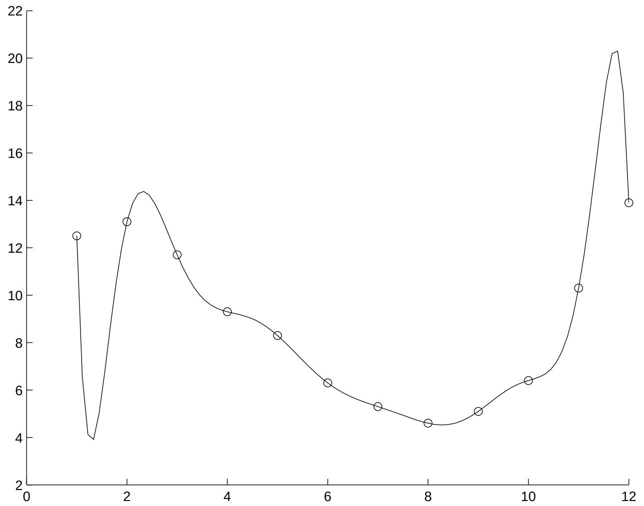
Chiaramente il polinomio di grado 10 è una cattiva approssimazione di $f(x)$ quando x è fuori dalla zona centrale dell'intervallo. Anzi, si può dimostrare che al crescere di n la successione $\{p_n(x)\}$ non converge puntualmente a $f(x)$ e che i corrispondenti resti diventano in modulo arbitrariamente grandi in punti dell'intervallo $[-5, 5]$.

5.10 Esempio.

Riprendiamo adesso l'esempio 5.1 e sovrapponiamo ai valori della funzione il grafico del polinomio di interpolazione, che risulta essere, assumendo come nodi i valori $x_i = i + 1, \ i = 0, \ldots, 11$,

$$\begin{aligned} p_{11}(x) \quad = \quad & -8.1495 \cdot 10^{-6} x^{11} + 5.8862 \cdot 10^{-4} x^{10} - 1.8771 \cdot 10^{-2} x^9 \\ & +0.34783 x^8 - 4.1469 x^7 + 33.258 x^6 - 182.14 x^5 + 676.71 x^4 \\ & -1657.7 x^3 + 2521.9 x^2 - 2114.0 x + 738.20. \end{aligned}$$

(Per brevità i coefficienti sono riportati arrotondati alla 5a cifra significativa). Si ottiene la figura seguente, che mostra evidentemente come il polinomio di interpolazione non rappresenti affatto una buona approssimazione della funzione discreta al di fuori della zona centrale. Ciò è dovuto principalmente al fatto che il polinomio è di grado troppo elevato e quindi ha troppe oscillazioni.



Polinomio di interpolazione della funzione dell'esempio 5.1.

5.11 Il metodo dei minimi quadrati.

Se vogliamo evitare che il polinomio approssimante abbia un andamento oscillante che la funzione data non ha, bisogna ricorrere a polinomi di grado basso anche quando sono noti molti valori della funzione f. Occorre cioè trovare con il metodo dei minimi quadrati un polinomio di grado più basso di quello di interpolazione, che in generale non assume gli stessi valori di f nei nodi. Ma questo è comunque ragionevole se i valori $f(x_i)$ sono ottenuti sperimentalmente e quindi sono affetti da errore.

Sia allora $m < n$. Come appena osservato, non esiste in generale un polinomio

$$p_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m$$

tale che sia $p_m(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$, perché in tal caso sarebbe consistente il sistema lineare

$$V\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

dove la matrice V ha elementi

$$v_{ij} = x_{i-1}^{m-j+1}, \quad i = 1, \ldots n+1, \; j = 1, \ldots, m+1,$$

e si è posto $\mathbf{f} = [f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)]^T$ e $\mathbf{a} = \left[a_0, a_1, \ldots, a_m\right]^T$. Questo sistema è analogo a quello già introdotto nella dimostrazione del Teorema 5.3, con la differenza che nelle attuali ipotesi V non è quadrata, e quindi esistono soluzioni $\mathbf{a}$ se e solo se $\mathbf{f} \in S(V)$. Si procede allora cercando, se esiste, un polinomio $p_m(x)$ che renda minima la lunghezza euclidea del vettore degli scarti, cioè

$$\min_{(a_0,a_1,\ldots,a_m)} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} r_i^2}, \quad \text{dove} \quad r_i = f(x_i) - p_m(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

I vettori **a** di minimo, se esistono, sono gli stessi che minimizzano $\sum_{i=0}^{n} r_i^2$, quindi il problema dei minimi quadrati si può formulare equivalentemente nel modo seguente:

$$\min_{\mathbf{a}} \varphi(\mathbf{a}), \quad \text{dove } \varphi(\mathbf{a}) = \sum_{i=0}^{n} \Big[f(x_i) - p_m(x_i)\Big]^2 = \mathbf{r}^T\mathbf{r},$$

con $\mathbf{r} = \mathbf{f} - V\mathbf{a}$.
Poiché $\mathbf{R}^n = S(V) \oplus S(V)^{\perp}$, è $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$, con $\mathbf{f}_1 \in S(V)$ e $\mathbf{f}_2 \in S(V)^{\perp}$. Quindi $\mathbf{r} = \mathbf{f}_1 - V\mathbf{a} + \mathbf{f}_2$ e

$$\mathbf{r}^T\mathbf{r} = (\mathbf{f}_1 - V\mathbf{a})^T(\mathbf{f}_1 - V\mathbf{a}) + \mathbf{f}_2^T\mathbf{f}_2,$$

dal momento che $\mathbf{f}_1 - V\mathbf{a}$ e $\mathbf{f}_2$ sono ortogonali. È evidente allora che il minimo di $\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{r}^T\mathbf{r}$ vale $\mathbf{f}_2^T\mathbf{f}_2$, e lo si ottiene per i vettori **a** che risolvono il sistema lineare $V\mathbf{a} = \mathbf{f}_1$; tali vettori esistono perché $\mathbf{f}_1 \in S(V)$, e moltiplicando a sinistra entrambi i membri del sistema lineare per la matrice V^T si ottiene:

$$V^TV\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}_1 = V^T\mathbf{f},$$

avendo tenuto conto della relazione di ortogonalità $V^T\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2^T V = \mathbf{0}$. Dunque i vettori **a** per i quali $\varphi(\mathbf{a})$ è minima sono le soluzioni del sistema

$$V^TV\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}. \tag{4}$$

Il sistema (4), di ordine $m+1$, è detto sistema delle *equazioni normali* e ha una sola soluzione perché V^TV è non singolare. Infatti, se fosse singolare, esisterebbero vettori **x** non nulli per cui $V^TV\mathbf{x} = \mathbf{0}$, da cui $\mathbf{x}^TV^TV\mathbf{x} = 0$, e quindi $V\mathbf{x} = \mathbf{0}$: questo implicherebbe che V non ha rango massimo $m+1$, che è assurdo, perché V contiene sottomatrici quadrate di ordine $m+1$ che sono matrici di Vandermonde non singolari.
Il polinomio p_m così ottenuto è anche chiamato polinomio di *regressione*.

Per $m = 1$ il polinomio di *regressione lineare* che si ottiene è

$$p_1(x) = a_0x + a_1,$$

dove i coefficienti a_0 e a_1 si ottengono risolvendo il sistema (5), che in questo caso particolare ha la forma

$$\begin{cases} \Big[\sum_{i=0}^{n} x_i^2\Big]a_0 + \Big[\sum_{i=0}^{n} x_i\Big]a_1 = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)x_i \\ \Big[\sum_{i=0}^{n} x_i\Big]a_0 + (n+1)a_1 = \sum_{i=0}^{n} f(x_i). \end{cases}$$

5.12 Esempio.

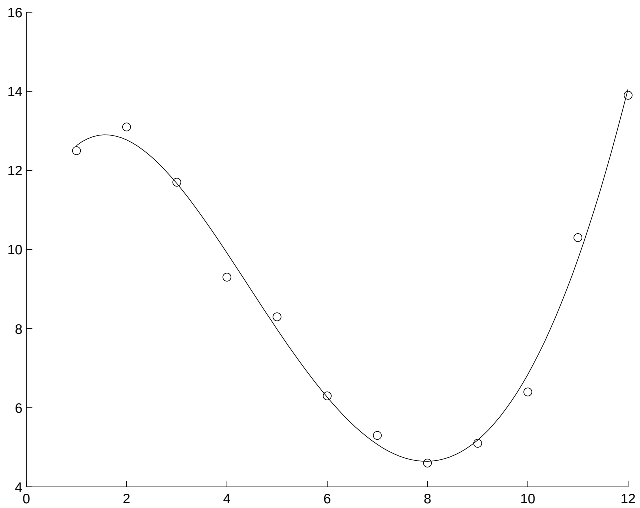
Consideriamo di nuovo il problema proposto nell'esempio 5.1, affrontandolo con il polinomio di regressione di grado 5. I nodi sono $x_i = i + 1,\ i = 0, \ldots, 11$, quindi la matrice V è

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^5 & 3^4 & 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 12^5 & 12^4 & 12^3 & 12^2 & 12 & 1 \end{bmatrix},$$

e dalla risoluzione del sistema (4) si ottiene il polinomio

$$\begin{aligned} p_5(x) &= 1.1784 \cdot 10^{-4} x^5 - 6.2153 \cdot 10^{-3} x^4 + 0.15242 x^3 - 1.3915 x^2 \\ &\quad +3.3410 x + 10.532. \end{aligned}$$

(Per brevità i coefficienti sono riportati arrotondati alla 5a cifra significativa). Il suo grafico è riportato nella figura seguente.



Polinomio di regressione della funzione dell'esempio 5.1

Si confronti questo grafico con quello del polinomio di interpolazione di grado 11 ottenuto nell'esempio 5.10. Il polinomio di regressione non passa esattamente per i punti della funzione discreta, ma l'approssimazione complessiva è evidentemente preferibile.