Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 6 luglio 2016

Esercizio 1

(a) È evidente che i vettori $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ non sono proporzionali, quindi sono linearmente indipendenti: dunque il sottospazio da loro generato ha dimensione 2. Per lo stesso motivo si ha che il sottospazio generato da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ ha dimensione 2. In alternativa si può applicare il metodo di Gauss alle due matrici ottenute affiancando i vettori dati, ottenendo, per il primo sottospazio

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e per il secondo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\dim U = \dim V = 2$.

Per determinare la dimensione di $U + V$ si applica il metodo di Gauss alla matrice $A = [\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}_2|\boldsymbol{v}_1|\boldsymbol{v}_2]$:

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\dim(U + V) = \mathrm{rank} A^{(3)} = 3$, ne segue che $U + V = \mathbb{R}^3$. Usando la relazione $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim U \cap V$ si ottiene immediatamente $\dim U \cap V = 1$.

(b) I vettori $\boldsymbol{x} \in U \cap V$ sono tutti e soli quelli esprimibili come

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 = \beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}_2,$$

pertanto ad ogni $\boldsymbol{x}$ corrisponde un vettore $[\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2]^T \in N(B)$, dove $B = [\boldsymbol{u}_1|\boldsymbol{u}_2|-\boldsymbol{v}_1|-\boldsymbol{v}_2]$. B differisce da A per il segno della terza e della quarta colonna, quindi la forma ridotta di B ottenibile con il metodo di Gauss differisce da quella ottenuta per A soltanto nel segno delle ultime due colonne:

$$B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Quindi, dall'ultima riga di $B^{(3)}$ si ha, ponendo $\beta_2 = k$, $\beta_1 = -3k$, e quindi $\boldsymbol{x} = -3k\boldsymbol{v}_1 + k\boldsymbol{v}_2 = k(-3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = k[\,-2,\ -12,\ -8\,]^T$. Come base di $U \cap V$ si può scegliere quella formata dal vettore $[\,1,\ 6,\ 4\,]^T$.

(c) $\mathbb{R}^3$ non è somma diretta dei due sottospazi perché la loro intersezione non è il sottospazio $\{\boldsymbol{0}\}$.

Esercizio 2

(a) La matrice A e il vettore $\boldsymbol{b}$ sono i seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

È evidente che $\operatorname{rank} A = 1$. Con il metodo di Gauss la matrice aumentata del sistema lineare viene ridotta alla forma triangolare

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

quindi il sistema è consistente e le soluzioni possono essere espresse nella forma

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad h, k \in \mathbb{R}.$$

(b) Si osservi che $A^2 = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T = (\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T = -2A$, pertanto il sistema $A^2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ si può riscrivere come $-2A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, ovvero $A(-2\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}$. Ne segue che tra $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{x}$ soluzione del sistema al punto (a) intercorre la relazione $-2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, quindi $\alpha = -\frac{1}{2}$.

(c) (*facoltativo*) Dati $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ non nulli e $A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$, si ha $S(A) = \operatorname{span}\{\boldsymbol{u}\}$. Analogamente, poiché $A^T = \boldsymbol{v}\boldsymbol{u}^T$, si ha $S(A^T) = \operatorname{span}\{\boldsymbol{v}\}$. Di conseguenza, affinché entrambi i sistemi siano consistenti, deve essere $\boldsymbol{b} \in S(A) \cap S(A^T)$, e questo implica che $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$, oppure che $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ siano linearmente dipendenti.

Esercizio 3

(a) La matrice A ha le seguenti proprietà, utili ai fini dello studio degli autovalori: è simmetrica, quindi ha autovalori reali, inoltre è singolare (ha due righe uguali), quindi ammette autovalore 0. Si osservi inoltre che, essendo diagonalizzabile perché simmetrica, gli autovalori hanno molteplicità algebriche e geometriche coincidenti.

(b) Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \lambda\big(- \lambda^2 + (\alpha + 2)\lambda + 2(1 - \alpha)\big),$$

e gli autovalori sono

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{\alpha + 2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 12}}{2}.$$

(c) Per $\alpha = 1$ gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$.

Gli autovettori relativi a 0 sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Dalla forma ridotta ottenuta con il metodo di Gauss

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha immediatamente che gli autovettori hanno la forma

$$\boldsymbol{x} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovettori relativi a 3 sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}.$$

Dalla forma ridotta ottenuta con il metodo di Gauss

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha che gli autovettori hanno la forma

$$\boldsymbol{x} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4

(a) Si ha $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = f(x_2) = 0$. I coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ sono la soluzione $\boldsymbol{a}$ del sistema $V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V|\boldsymbol{f}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

e con il metodo di Gauss viene ridotta alla forma seguente

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

da cui si ottiene $\boldsymbol{a} = [1/3,\ -4/3,\ 1]^T$, e quindi $p(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$.

(b) È $p(2) = L_0(2) = \dfrac{2-1}{0-1}\,\dfrac{2-3}{0-3} = -\dfrac{1}{3}$.

(c) I coefficienti del polinomio $q(x)$ di grado massimo uno che approssima $f(x)$ ai minimi quadrati sono la soluzione $\boldsymbol{b}$ del sistema $W^T W\boldsymbol{b} = W^T\boldsymbol{f}$, dove

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata del sistema lineare è:

$$[W^T W|W^T\boldsymbol{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} 10 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{array}\right],$$

che con il metodo di Gauss viene ridotta alla forma

$$\left[\begin{array}{cc|c} 10 & 4 & 0 \\ 0 & 7/5 & 1 \end{array}\right],$$

da cui si ottiene $\boldsymbol{b} = [-2/7,\ 5/7]^T$, e quindi $p(x) = -\frac{2}{7}x + \frac{5}{7}$. Si ha $f(2) = 1$, $p(2) = -1/3$, $q(2) = 1/7$, quindi $q(2)$ è l'approssimazione migliore.