Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare dell'8 luglio 2014

Esercizio 1

Si osservi innanzitutto che che i sottospazi U e V hanno entrambi dimensione due, e che il sottoinsieme W non è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ (geometricamente è rappresentato, nello spazio, da un piano non passante per l'origine).
I vettori $\boldsymbol{x}$ dell'insieme W sono esprimibili come

$$\boldsymbol{x} = z_1\boldsymbol{u}_1 + z_2\boldsymbol{u}_2 = z_3\boldsymbol{v}_1 + z_4\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_0,$$

quindi i vettori $\boldsymbol{z} = [z_1\ z_2\ z_3\ z_4]^T$ sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & -\boldsymbol{v}_1 & -\boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{w}_0.$$

La matrice aumentata di questo sistema è la seguente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

che, con il metodo di Gauss, è ricondotta alla forma triangolare

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

Il teorema di Rouché-Capelli è verificato, le soluzioni esistono infinite e, ponendo $z_3 = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, sono esprimibili come $\boldsymbol{z} = [\,2-\alpha, \quad \alpha, \quad \alpha, \quad 0\,]$.
Quindi si ottiene

$$\boldsymbol{x} = z_3\boldsymbol{v}_1 + z_4\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}_0 = \alpha\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}_0 = [\,\alpha + 1, \quad \alpha + 1, \quad 1\,]^T.$$

Esercizio 2

(a) Il modo più rapido per calcolare l'inversa consiste nel ricondurre A a forma triangolare superiore permutandone le colonne, invece che con il metodo di Gauss. Infatti se si considera la matrice di permutazione

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha

$$B = AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

che è triangolare superiore. Chiaramente B è invertibile, e vale la relazione $A^{-1} = PB^{-1}$. Dalla matrice aumentata

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

con quattro sostituzioni all'indietro si ottiene

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e quindi

$$A^{-1} = PB^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Dal punto precedente risulta

$$A - A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e il suo determinante, calcolato con l'espansione di Laplace rispetto all'ultima colonna, è il seguente:

$$\det(A - A^{-1}) = (-1) \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

(c) (*facoltativo*) È noto che gli autovalori di $A - A^{-1}$ hanno necessariamente la forma $\lambda - \lambda^{-1}$, dove λ è un autovalore di A. Dal punto (b) si ha che, essendo $A - A^{-1}$ singolare, deve ammettere autovalore 0, quindi esiste un autovalore di A tale che $\lambda - \lambda^{-1} = 0$, ovvero A ammette autovalore 1 o -1.

Esercizio 3

(a) Basta verificare che $\det A \neq 0$. Con il metodo di Gauss, oppure con un'espansione di Laplace, oppure con la regola di Sarrus si ottiene $\det A = -1$.

(b) Per studiare la diagonalizzabilità di A è necessario calcolarne gli autovettori. Il polinomio caratteristico è

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= -\lambda^3 + (k-1)\lambda^2 + (k-1)\lambda - 1 \\ &= -(\lambda^3 + 1) + (k-1)(\lambda^2 + \lambda) \\ &= -(\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda + 1) + \lambda(k-1)(\lambda+1) \\ &= (\lambda+1)(-\lambda^2 + k\lambda - 1), \end{aligned}$$

quindi gli autovalori di A sono

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$

Se A non è diagonalizzabile ha necessariamente qualche autovalore multiplo. A ha autovalori multipli soltanto per $k = 2$ o $k = -2$, quindi si esaminano gli autovettori in questi due soli casi. Per $k = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ è autovalore doppio, e si ha

$$A - I = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

che, con il metodo di Gauss, si riconduce alla forma triangolare:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Per la molteplicità geometrica si ha dunque $\tau(1) = 1$, quindi la matrice non è diagonalizzabile. Per $k = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ è autovalore triplo, e si ha

$$A + I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

che ha evidentemente rango 1. Quindi $\tau(-1) = 2$, quindi la matrice non è diagonalizzabile. La non diagonalizzabilità per $k = -2$ si può dimostrare più semplicemente con le seguenti considerazioni: se A fosse diagonalizzabile per $k = -2$ esisterebbe S invertibile tale cui $S^{-1}AS = D$, con $D = -I$, quindi dovrebbe essere $A = -I$, il che è falso.

Si conclude che la matrice non è diagonalizzabile per $|k| = 2$.

Esercizio 4

(a) Il vettore dei coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ è la soluzione $\boldsymbol{a}$ del sistema $V\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

che ha la soluzione $a_0 = -2$, $a_1 = 2$, e $a_2 = 0$. Il polinomio è $p(x) = -2x^2 + 2x$.

(b) Poiché $f'(x) = \sin(\pi x) - \pi x \cos(\pi x)$, si ha $f'(x_1) = 1$, dunque il vettore dei coefficienti del polinomio $q(x)$ è la soluzione $\boldsymbol{b}$ del sistema $W\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}$, dove

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando il metodo di Gauss alla matrice aumentata $[W|\boldsymbol{g}]$ (con lo scambio della prima con la seconda riga) si ottiene la matrice:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Il teorema di Rouché-Capelli non è verificato, il sistema non ha soluzioni, quindi non esistono polinomi $q(x)$ con le proprietà richieste.