Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare dell'11 giugno 2013

Esercizio 1

(a) Si può affrontare lo studio del rango calcolando il determinante di A come polinomio cubico in k, ed esaminando il rango della matrice per i valori k che annullano tale polinomio. Con la regola di Laplace rispetto alla prima colonna di A si ottiene:

$$\det A = (2k-3)[(2k-1)2(2k-3)+6]+[-6(k-1)(k-3)+6]-[6-2(2k-1)]$$
$$= 8(k-2)^2(k-1).$$

Quindi il rango è tre per $k \neq 2$ e $k \neq 1$. Altrimenti il rango è deficitario. In particolare, per $k = 2$ si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

che ha evidentemente rango uno, mentre per $k = 1$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \end{bmatrix},$$

che, con il metodo di Gauss, è riconducibile alla forma triangolare superiore

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

in questo caso il rango è due.

In alternativa si può applicare il metodo di Gauss alla matrice assegnata, scambiando la prima con la terza riga, per evitare di distinguere il caso il cui $a_{11} = 2k-3 = 0$. Si ottengono successivamente le matrici seguenti:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2(k-3) \\ -1 & 2k-1 & -2 \\ 2k-3 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2(k-3) \\ 0 & 2(k-2) & 2(-k+2) \\ 0 & 6(k-2) & 4(k-2)(k-\frac{5}{2}) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2(k-3) \\ 0 & 2(k-2) & 2(-k+2) \\ 0 & 0 & 2(k-2)(-k+1) \end{bmatrix}.$$

Si osservi che l'ultima matrice è ottenibile dalla precedente anche nel caso che sia $k = 2$, perché non è necessario effettuare divisioni per $k-2$. Si conclude quindi che per $k = 2$ o $k = 1$ il rango è rispettivamente uno o due, per tutti gli altri valori di k è tre.

(b) Sia $k = 2$. Come matrice B si può scegliere una qualunque matrice 3×3 le cui colonne siano vettori di $S(A)^{\perp}$, in particolare $B = O$.

(c) Se B fosse invertibile, da $BA = O$ si otterrebbe $A = B^{-1}O = O$, il che è falso.

Esercizio 2

(a) Si calcolano le colonne di B:

$$A\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad A^2\mathbf{z} = A(A\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A^3\mathbf{z} = A(A^2\mathbf{z}) = \mathbf{0}.$$

Quindi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) L'ultima colonna di B è nulla, pertanto il rango di B è al più tre. Per calcolare il rango si può applicare il metodo di Gauss alle prime tre colonne di B:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 27 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il rango di B è esattamente tre.

(c) (*facoltativo*) Si deve considerare la combinazione lineare nulla

$$\alpha\mathbf{z} + \beta A\mathbf{z} + \gamma A^2\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

e dimostrare he $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Moltiplicando la combinazione per A si ha

$$\alpha A\mathbf{z} + \beta A^2\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

poi quest'ultima ancora per A si ha

$$\alpha A^2\mathbf{z} = \mathbf{0},$$

da cui, essendo $A^2\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, segue $\alpha = 0$. Sostituendo $\alpha = 0$ nella combinazione precedente si ottiene $\beta = 0$, e sostituendo $\beta = 0$ nella prima combinazione si ha $\gamma = 0$.

Esercizio 3

(a) A è diagonalizzabile se e solo se ammette tre autovettori linearmente indipendenti. Il polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 2),$$

per cui gli autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}\,\mathbf{i}$ e $\lambda_3 = \sqrt{2}\,\mathbf{i}$, risultano distinti. Poiché ad autovalori distinti corrispondono autovettori linearmente indipendenti, A è diagonalizzabile.

(b) Sia $\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3]^T$ un generico vettore di $\mathbf{R}^3$. si ha

$$\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = [x_1\ x_2\ x_3] \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_3 \\ -x_2 \end{bmatrix} = x_1x_2 - x_2x_1 + x_2x_3 - x_3x_2 = 0.$$

Quindi per tutti i vettori $\mathbf{x}$ di $\mathbf{R}^3$ si ha $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$.

Esercizio 4

(a) Il vettore dei coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo due $p(x)$ è la soluzione $\mathbf{c}$ del sistema $V^TV\mathbf{c} = V^T\mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a^2 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-a \\ 1 \\ 1-a \\ 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V^TV|V^T\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2(a^4+1) & 0 & 2(a^2+1) & 2a^2(1-a) \\ 0 & 2(a^2+1) & 0 & 0 \\ 2(a^2+1) & 0 & 5 & -2a+3 \end{array}\right].$$

Con il metodo di Gauss, con una sola combinazione lineare, la matrice aumentata diventa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2(a^4+1) & 0 & 2(a^2+1) & 2a^2(1-a) \\ 0 & 2(a^2+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3a^4-4a^2+3}{a^4+1} & \frac{a^4+2a^3-2a^2-2a+3}{a^4+1} \end{array}\right].$$

La soluzione è quindi $c_2 = \frac{a^4+2a^3-2a^2-2a+3}{3a^4-4a^2+3}$, $c_1 = 0$, $c_0 = \frac{-3a^3+2a^2+2a-3}{3a^4-4a^2+3}$. Il calcolo di c_0 e c_2, in questo caso, è tuttavia più rapido se si applica la regola di Cramer al sistema formato dalla prima e dalla terza equazione:

$$c_0 = \frac{\det \begin{bmatrix} 2a^2(1-a) & 2(a^2+1) \\ -2a+3 & 5 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2(a^4+1) & 2(a^2+1) \\ 2(a^2+1) & 5 \end{bmatrix}} = \frac{-3a^3+2a^2+2a-3}{3a^4-4a^2+3},$$

$$c_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} 2(a^4+1) & 2a^2(1-a) \\ 2(a^2+1) & -2a+3 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2(a^4+1) & 2(a^2+1 \\ 2(a^2+1) & 5 \end{bmatrix}} = \frac{a^4+2a^3-2a^2-2a+3}{3a^4-4a^2+3}.$$

(b) Sia nel caso $a = 0$ che nel caso $a = 1$ i nodi distinti sono tre: -1, 0 e 1, quindi il polinomio ai minimi quadrati coincide con il polinomio di interpolazione: $c_0 = -1$, $c_2 = 1$, $p(x) = -x^2 + 1$.