Soluzione della prova scritta di
di Algebra lineare del 13 gennaio 2014

Esercizio 1

(a) Con il metodo di Gauss si ottengono da A le seguenti matrici:

$$A^{(1)} = A, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si ha quindi $\dim S(A) = \operatorname{rk} A = 2$ e $\dim N(A) = 3 - \operatorname{rk} A = 1$. Come base di $S(A)$ si può prendere l'insieme formato dalle prime due colonne di A, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, con $\mathbf{v}_1 = [1\ -2\ 1\ 3]^T$ e $\mathbf{v}_2 = [-1\ -2\ 5\ 1]^T$. I vettori $\mathbf{x}$ di $N(A)$ si determinano assegnando un valore arbitrario α a x_3 e ricavando x_2 e x_1 per sostituzione all'indietro: $\mathbf{x} = \alpha[\frac{1}{2}\ -\frac{1}{2}\ 1]^T$.

(b) Dal punto (a) $r = 2$, e $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono stati già individuati. Per completare la base richiesta basta trovare una base di $S(A)^\perp = N(A^T)$. $B = A^T$ viene triangolarizzata con il metodo di Gauss nel modo seguente:

$$B^{(1)} = B, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

I vettori $\mathbf{z}$ di $N(A^T)$ si determinano assegnando valori arbitrari α a z_3 e β a z_4, e ricavando z_2 e z_1 per sostituzione all'indietro, da cui:

$$\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ponendo $\mathbf{z}_1 = [2\ \frac{3}{2}\ 1\ 0]^T$ e $\mathbf{z}_2 = [-1\ 1\ 0\ 1]^T$ si è completata la base.

Esercizio 2

(a) Se $\det A \neq 0$, anche $\det A^2 \neq 0$, quindi entrambe la matrici hanno rango massimo 2. Poiché $\det A = \alpha^2(\alpha + 2)$, vanno esaminati soltanto i casi $\alpha = 0$ e $\alpha = -2$.

Per $\alpha = 0$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi $\operatorname{rank} A = 1$ e $\operatorname{rank} A^2 = 0$.

Per $\alpha = -2$ si ha

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

quindi anche in questo caso $\operatorname{rank} A = 1$ e $\operatorname{rank} A^2 = 0$.

I soli valori di α per i quali i due ranghi differiscono sono 0 e -2.

Alle stessa conclusione si può arrivare calcolando A^2, triangolarizzando A e A^2 con il metodo di Gauss, per studiare poi i ranghi delle due matrici al variare di α.

(b) (*facoltativo*) La disuguaglianza $\operatorname{rank} A \geq \operatorname{rank} A^2$ è equivalente alla disuguaglianza $\dim S(A) \geq \dim S(A^2)$, che deriva dall'inclusione $S(A) \supseteq S(A^2)$: infatti, se $\mathbf{y} \in S(A^2)$, allora $\mathbf{y} = A^2\mathbf{x}$ per qualche $\mathbf{x}$, ovvero $\mathbf{y} = A\mathbf{z}$ per $\mathbf{z} = A\mathbf{x}$, quindi $\mathbf{y} \in S(A)$.

Una condizione sufficiente affinché sia $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^2$ è, come già osservato al punto (a), la non singolarità di A. Tuttavia la condizione non è necessaria, come si vede considerando $A = O$.

Un'altra condizione sufficiente è che A sia diagonalizzabile. Si può dimostrare che questa condizione è anche necessaria.

Esercizio 3

(a) Il polinomio caratteristico di A è

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 & k \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Espandendo secondo la prima riga con la regola di Laplace si ottiene:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\lambda \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} - k \det \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^4 - k(1+\lambda)^2 \\ &= \Big(\lambda^2 + \sqrt{k}(1+\lambda)\Big)\Big(\lambda^2 - \sqrt{k}(1+\lambda)\Big). \end{aligned}$$

Gli autovalori sono dunque le soluzioni delle due equazioni algebriche

$$\lambda^2 + \sqrt{k}\,\lambda + \sqrt{k} = 0, \quad \lambda^2 - \sqrt{k}\,\lambda - \sqrt{k} = 0,$$

ovvero

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\sqrt{k} \pm \sqrt{k - 4\sqrt{k}}}{2}, \quad \lambda_{3,4} = \frac{\sqrt{k} \pm \sqrt{k + 4\sqrt{k}}}{2}.$$

(b) La matrice A non è diagonalizzabile se e solo se ha qualche autovalore con molteplicità algebrica maggiore di quella geometrica. Si deve quindi esaminare se, al variare di k, A ha autovalori multipli, e in tal caso determinarne la molteplicità geometrica. Per $0 < k < 16$, λ_1 e λ_2 sono non reali e distinti, mentre λ_3 e λ_4 sono reali e $\lambda_3 < \lambda_4$.

Per $k = 16$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$, $\lambda_{3,4} = 2(1 \pm \sqrt{2})$.

Per $k > 16$, tutti gli autovalori sono reali, con $\lambda_1 < \lambda_2$ e $\lambda_3 < \lambda_4$. Inoltre vale la disuguaglianza $\lambda_2 < \lambda_3$: infatti, per $k > 16$,

$$-\sqrt{k} + \sqrt{k - 4\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k + 4\sqrt{k}}$$

se e solo se valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\sqrt{k - 4\sqrt{k}} + \sqrt{k + 4\sqrt{k}} < 2\sqrt{k},$$

$$2k + 2\sqrt{k^2 - 16k} < 4k, \quad \sqrt{k(k-16)} < k,$$

$$k - 16 < k,$$

che è verificata.

Quindi l'unico valore positivo di k per cui si hanno autovalori multipli è $k = 16$, e l'autovalore doppio da considerare è $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. La sua molteplicità geometrica è la dimensione del nucleo della matrice

$$A + 2I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 16 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

la quale ha rango 3, perché con il metodo di Gauss è riconducibile alla forma triangolare

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il nucleo di $A + 2I$ ha dimensione 1, quindi per $k = 16$ A non è diagonalizzabile.

Esercizio 4

(a) Il vettore dei coefficienti del polinomio di interpolazione $p(x)$ è la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V\mathbf{a} = \mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si può risolvere il sistema lineare con il metodo di Gauss, e si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{15}{16} & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Il sistema ha la soluzione $a_2 = 0$, $a_1 = \frac{7}{6}$, e $a_0 = -\frac{1}{6}$. Il polinomio di interpolazione è $p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{6}x$.

(b) I polinomi $L_j(x)$, $j = 0, 1, 2$, che intervengono nella formula di Lagrange sono:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-4)}{4}, \quad L_1(x) = \frac{x(x-4)}{-3}, \quad L_2(x) = \frac{x(x-1)}{12}.$$

Dalla formula di Lagrange applicata per $x = 2$ si ottiene:

$$p(2) = \sum_{j=0}^{3} f(x_j)L_j(2) = 1 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

(c) Il vettore dei coefficienti del polinomio $q(x)$ è la soluzione $\mathbf{b}$ del sistema $W\mathbf{b} = \mathbf{g}$, dove

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Si può risolvere il sistema lineare con il metodo di Gauss, e si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 16 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 8 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Il sistema ha la soluzione $b_2 = 0$, $b_1 = \frac{3}{4}$, e $b_0 = -\frac{1}{16}$. Il polinomio è $q(x) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{3}{4}x$.

Poiché $|p(2) - f(2)| = |\frac{5}{3} - \sqrt{2}| = 0.252..$, e $|q(2) - f(2)| = |\frac{5}{4} - \sqrt{2}| = 0.164..$, il polinomio $q(x)$ approssima meglio $f(x)$ in 2.