Soluzione della seconda prova intermedia del 9 gennaio 2014

Esercizio 1

(a) Si considera il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 11-\lambda & -5 & 9 \\ -1 & 0 & 1-\lambda & 0 \\ -5 & 9 & -5 & 11-\lambda \end{bmatrix},$$

e si sviluppa il determinante con la regola di Laplace rispetto alla quarta colonna, ottenendo:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 9\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \\ -5 & 9 & -5 \end{bmatrix} \\ &\quad +(11-\lambda)\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ -5 & 9-\lambda & -5 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= -81\left[(1-\lambda)^2-1\right] + (11-\lambda)\left\{(11-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]\right\} \\ &= \left[(1-\lambda)^2-1\right]\left[-81+(11-\lambda)^2\right]. \end{aligned}$$

Gli autovalori pertanto sono:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 2, \text{con molteplicità algebrica due}, \lambda_3 = 20.$$

(b) A è diagonalizzabile se e solo se per l'autovalore doppio $\lambda_2 = 2$ esistono due autovettori linearmente indipendenti, ovvero se e solo se $\dim N(A-2I) = 2$. Si ha

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 9 & -5 & 9 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -5 & 9 & -5 & 9 \end{bmatrix}.$$

È evidentemente $\operatorname{rk}(A-2I) = 2$, dunque $\dim N(A-2I) = 4 - \operatorname{rk}(A-2I) = 2$. Quindi A è diagonalizzabile.

(c) Si ottiene facilmente

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & -5 & 11 & 9 \\ -5 & -5 & 9 & 11 \end{bmatrix}.$$

Infatti nel prodotto di P per A si scambiano la seconda e la terza riga di A, mentre nel prodotto di PA per P si scambiano la seconda e la terza colonna di PA. Se si osserva che $P^2 = I$ si ha che $P = P^{-1}$. Inoltre P è simmetrica. Quindi P è una matrice unitaria simmetrica. Dunque B è una trasformata per similitudine di A, e pertanto ha gli stessi autovalori di A.

Esercizio 2

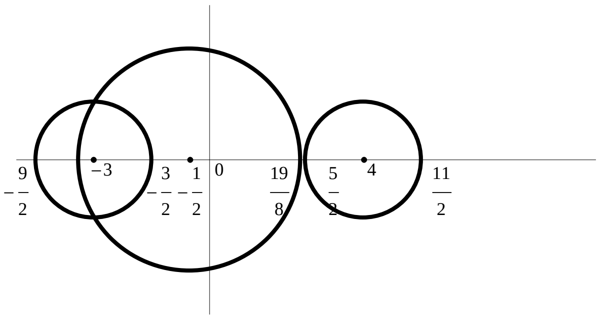
I cerchi per riga sono:

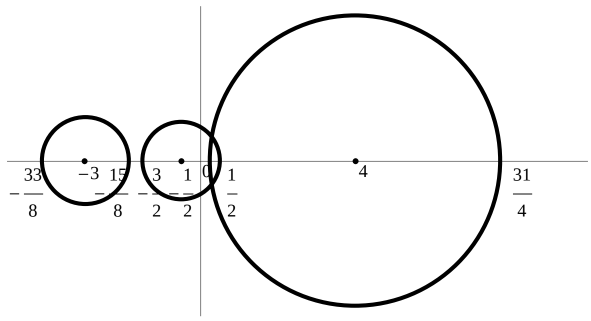
K_1, con centro 4 e raggio 3/2,
K_2, con centro -1/2 e raggio 23/8,
K_3, con centro -3 e raggio 3/2,

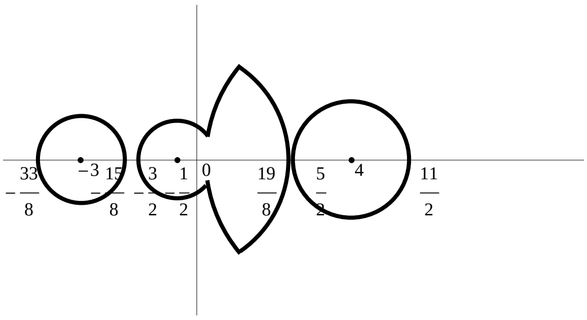
e quelli per colonna sono

H_1, con centro 4 e raggio 15/4,
H_2, con centro -1/2 e raggio 1,
H_3, con centro -3 e raggio 9/8.

Si riportano di seguito i cerchi di Gerschgorin per righe, per colonne, e l'intersezione delle loro unioni.







(a) K_1 è disgiunto da $K_2 \cup K_3$, quindi contiene un solo autovalore λ_1, che deve essre reale. H_3 è disgiunto da $H_1 \cup H_2$, quindi contiene un solo autovalore λ_3, che deve essre reale. Ne segue che anche λ_2 deve essere reale.

Dalla localizzazione per righe risulta $5/2 \leq \lambda_1 \leq 11/2$.

Dalla localizzazione per colonne risulta $-33/8 \leq \lambda_3 \leq -15/8$.

Dall'intersezione delle due unioni si ha infine che $-3/2 \leq \lambda_2 \leq 19/8$.

(b) Poiché $\det A = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$, dalle limitazioni ottenute al punto (a) si ottiene:

$$|\det A| \leq \frac{11}{2} \cdot \frac{19}{8} \cdot \frac{33}{8}.$$

Esercizio 3

(a) I coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno (retta di regressione lineare) $p(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^TV\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

$$[V^TV|V^T\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{34}{9} & \frac{8}{3} & \frac{11}{6} \\ \frac{8}{3} & 3 & \frac{3}{2} \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} \frac{34}{9} & \frac{8}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & \frac{19}{17} & \frac{7}{34} \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [27/76 \;\; 7/38]^T$, e quindi $p(x) = \frac{27}{76}x + \frac{7}{38}$.

(b) (*facoltativo*) Il vettore $\tilde{\mathbf{a}}$ dei coefficienti di $q(x)$ è la soluzione del sistema $W^T W \tilde{\mathbf{a}} = W^T \tilde{\mathbf{f}}$, dove

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ f(x_3) \end{bmatrix}.$$

Si osservi che

$$W^T W = V^T V + \begin{bmatrix} x_3^2 & x_3 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e } W^T \tilde{\mathbf{f}} = V^T \mathbf{f} + \begin{bmatrix} x_3 f(x_3) \\ f(x_3) \end{bmatrix}.$$

Se si impone che $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}$ si deve avere

$$W^T W = V^T V \mathbf{a} + \begin{bmatrix} x_3^2 & x_3 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a} = V^T \mathbf{f} + \begin{bmatrix} x_3 f(x_3) \\ f(x_3) \end{bmatrix},$$

quindi $\mathbf{a}$ deve essere soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} x_3^2 & x_3 \\ x_3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{a} = \begin{bmatrix} x_3 f(x_3) \\ f(x_3) \end{bmatrix}.$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema è singolare, ma le soluzioni esistono infinite, perché la prima equazione si ottiene moltiplicando la seconda per x_3 e quindi il teorema di Rouchè-Capelli è soddisfatto. In particolare dovrà essere

$$a_0 x_3 + a_1 = f(x_3),$$

cioè il punto $(x_3, f(x_3))$ deve appartenere alla retta di regressione ottenuta al punto (a).