Soluzione della seconda prova intermedia di Algebra lineare del 17 maggio 2012

Esercizio 1

(a) Si calcola il polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ k & 1-2k-\lambda & k \\ 1 & -2 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

usando lo sviluppo di Laplace secondo la prima riga, e si ha

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= -\lambda[(1-2k-\lambda)(2-\lambda)+2k] - 2[(2-\lambda)k - k] \\ &\quad -[-2k-(1-2k-\lambda)] \\ &= -\lambda^3 + (-2k+3)\lambda^2 + (4k-3)\lambda - 2k + 1. \end{aligned}$$

Si osservi che $\lambda_1 = 1$ è autovalore, per sostituzione diretta in $p(\lambda)$, o in $A - \lambda I$, che risulta avere la seconda e la terza riga proporzionali alla prima. Pertanto $p(\lambda)$ si fattorizza nel modo seguente:

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)[-\lambda^2 + 2(-k+1)\lambda + 2k - 1].$$

I restanti autovalori sono $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1 - 2k$.

(b) Si deve stabilire quali sono i valori di k per cui A non ammette tre autovettori linearmente indipendenti. Si calcolino prima di tutto gli autovettori relativi a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Si considera quindi il sistema lineare

$$(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

le cui soluzioni non nulle sono gli autovettori cercati. Con il metodo di Gauss si ottiene la matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango 1, per ogni k. Quindi la molteplicità geometrica di λ_1 è due.

Sono allora due i casi da distinguere ai fini della diagonalizzabilità:

$\lambda_3 \neq \lambda_1$, ovvero $k \neq 0$: le molteplicità geometriche e algebriche di entrambi gli autovalori coincidono, la matrice A è diagonalizzabile.

$\lambda_3 = \lambda_1$, ovvero $k = 0$: l'unico autovalore ha molteplicità geometrica e algebrica rispettivamente due e tre, quindi A non è diagonalizzabile.

Si conclude che l'unico valore di k per cui A non è diagonalizzabile è $k = 0$.

(c) Si scelga un valore di k non nullo, ad esempio $k = 1$. S è una qualunque matrice le cui colonne siano tre autovettori linearmente indipendenti di A. Per l'autovalore $\lambda_1 = 1$ si possono scegliere due vettori linearmente indipendenti del nucleo di $A - I$, ad esempio, come si ha facilmente dal sistema considerato al punto (b), $\mathbf{s}_1 = [-1\ 0\ 1]^T$, e $\mathbf{s}_2 = [2\ 1\ 0]^T$.

Per $\lambda_3 = -1$, gli autovettori sono le soluzioni non nulle del sistema lineare

$$(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

la cui matrice triangolarizzata con il metodo di Gauss è:

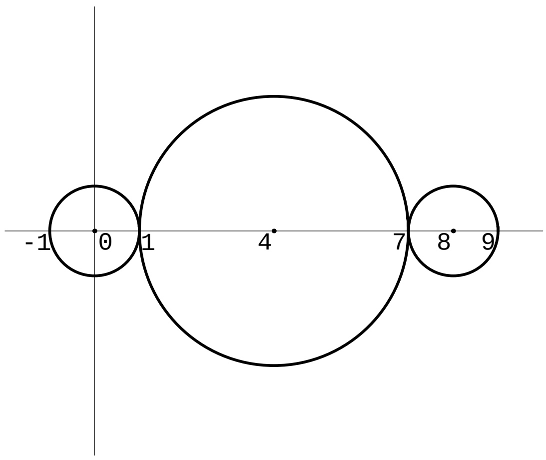
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

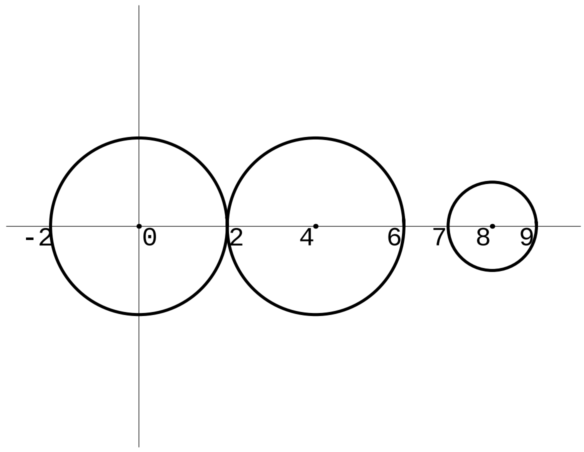
per cui si può scegliere come autovettore $\mathbf{s}_3 = [-1\ 1\ 1]^T$. Quindi

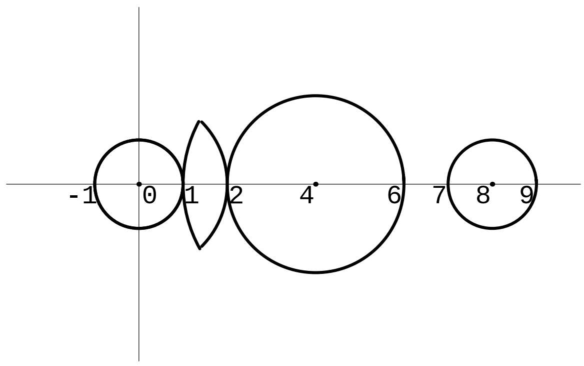
$$S = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

(a) Si riportano di seguito i cerchi di Gerschgorin per righe, per colonne, e l'intersezione delle loro unioni.







La matrice, reale di ordine tre, ha almeno un autovalore reale. Dall'esame dei cerchi per colonne, essendo il cerchio di centro 8 disgiunto dall'unione degli altri, si ricava che un autovalore reale, sia esso λ_3, appartiene all'intervallo $[7, 9]$. Non esistono altri cerchi, per righe o per colonne, disgiunti dall'unione dei restanti, che permettano di stabilire l'esistenza di altri autovalori reali. Comunque, dall'esame dell'intesezione delle unioni, vale $|\lambda_i| \leq 6$, $\mathrm{Re}\,(\lambda_i) \geq -1$, $i = 1, 2$.

(b) Poiché

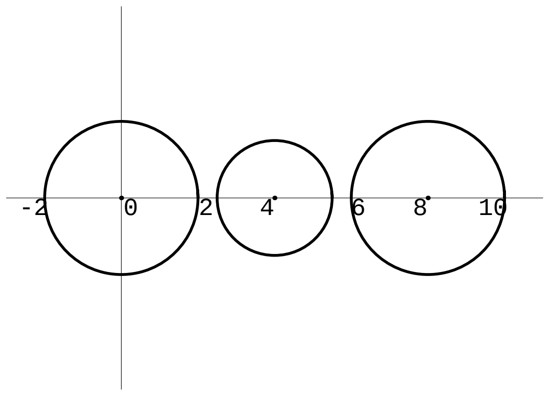
$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

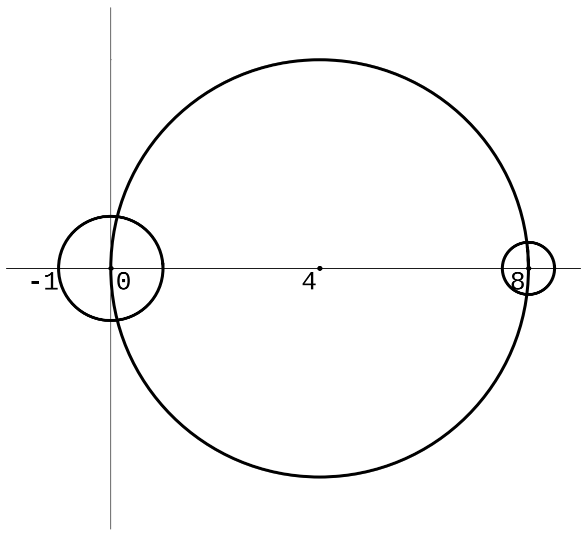
si ottiene

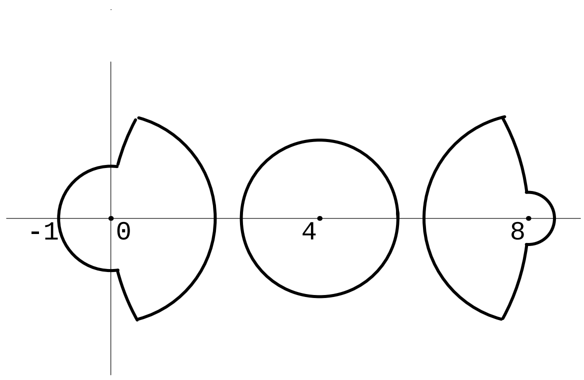
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1/2 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

A e B sono simili, e quindi hanno gli stessi autovalori.

(c) I cerchi di Gerschgorin di B, per righe, per colonne, e l'intersezione delle loro unioni sono i seguenti:







I cerchi per righe sono a due a due disgiunti, quindi tutti gli autovalori sono reali. Inoltre, facendo riferimento all'intersezione delle unioni, si può aggiungere che

$$-1 \leq \lambda_1 \leq 2, \quad \frac{5}{2} \leq \lambda_2 \leq \frac{11}{2}, \quad 6 \leq \lambda_3 \leq \frac{17}{2}.$$

(d) (*facoltativo*) Per un generico α positivo si ha

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 2/\alpha & 4 & 1/\alpha \\ 0 & \alpha & 8 \end{bmatrix}.$$

Si considerino i cerchi di B, per righe. Affinché il primo cerchio sia disgiunto dal secondo deve essere $\alpha < 4 - 3/\alpha$. Affinché il secondo cerchio sia disgiunto dal terzo deve essere $4+3/\alpha < 8-\alpha$. Da entrambe le condizioni si ottiene la stessa disequazione di secondo grado

$$\alpha^2 - 4\alpha + 3 < 0,$$

che è soddisfatta dai valori $1 < \alpha < 3$.

Si considerino i cerchi di B, per colonne. Affinché il primo cerchio sia disgiunto dal secondo deve essere $2/\alpha < 4 - 2\alpha$. Affinché il secondo cerchio sia disgiunto dal terzo deve essere $4 + 2\alpha < 8 - 1/\alpha$. Dalle due condizioni si ottengono le due disequazioni di secondo grado

$$\begin{cases} 2\alpha^2 - 4\alpha + 2 < 0 \\ 2\alpha^2 - 4\alpha + 1 < 0 \end{cases},$$

che non sono simultaneamente soddisfatte da nessun valore di α.

Esercizio 3

(a) I coefficienti del polinomio ai minimi quadrati di grado massimo uno (retta di regressione lineare) $p(x)$ sono la soluzione $\mathbf{a}$ del sistema $V^T V\mathbf{a} = V^T\mathbf{f}$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata iniziale del sistema è

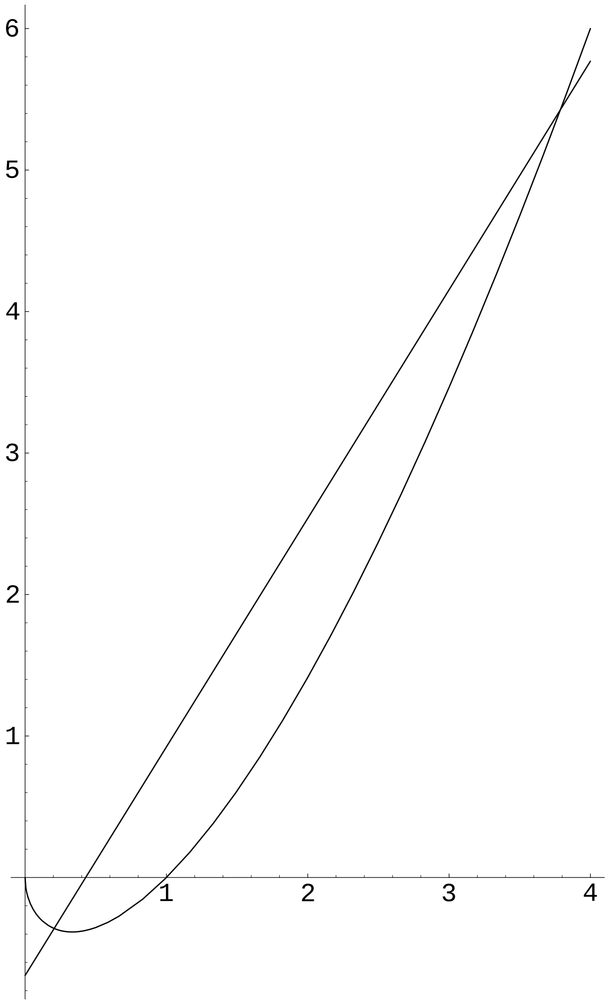
$$[V^T V | V^T\mathbf{f}] = \left[\begin{array}{cc|c} 17 & 5 & 24 \\ 5 & 3 & 6 \end{array}\right],$$

da cui, con il metodo di Gauss si ottiene

$$\left[\begin{array}{cc|c} 17 & 5 & 24 \\ 0 & \frac{26}{17} & -\frac{18}{17} \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $\mathbf{a} = [21/13 \quad -9/13]^T$, e quindi $p(x) = \frac{21}{13}x - \frac{9}{13}$.

(b) Si riportano grafici della funzione $f(x)$ e del polinomio $p(x)$, limitatamente all'intervallo assegnato:



(c) Per calcolare il massimo richiesto, si calcolano i punti stazionari di $r(x) = f(x) - p(x)$, e i confrontano, in valore assoluto, i valori nei punti stazionari e i valori assunti negli estremi dell'intervallo. I punti stazionari sono le soluzioni dell'equazione

$$r'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{21}{13} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0,$$

ovvero le soluzioni non negative dell'equazione

$$39z^2 - 42z - 13 = 0,$$

dove si è posto $z = \sqrt{x}$. Si ottiene la sola soluzione $z_s = (21 + 2\sqrt{237})/39 = 1.3279...$, che corrisponde al punto $x_s = z_s^2 = 1.7634...$. Poiché $r(0) = 9/13 = 0.6923...$, $r(x_s) = -1.1425...$, $r(4) = 3/13 = 0.2307...$, si ha

$$\max_{0 \le x \le 4} |f(x) - p(x)| = |r(x_s)| = 1.1425...$$