

Soluzione della prima prova intermedia
di Algebra lineare del 5 dicembre 2012 - compito D

Esercizio 1

- (a) \mathbf{u}_5 può essere espresso come combinazione lineare degli altri vettori $\mathbf{u}_i, i = 1, \dots, 4$ se e solo se il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{u}_5$ ha soluzioni, dove $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, e \mathbf{x} è il vettore formato dai coefficienti della combinazione lineare. Si applica il metodo di Gauss al sistema lineare, e si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & -2 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Quindi si ha $\text{rank } A = 3$, $\text{rank } [A|\mathbf{u}_5] = 3$, $\dim N(A) = 1$. I vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e \mathbf{u}_4 formano una base di $S(A)$. Il sistema ha infinite soluzioni, che si possono esprimere come

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{per } \alpha \in \mathbf{R}.$$

- (b) Dal punto precedente risulta che, affinché \mathbf{u}_5 dipenda linearmente da $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3$ e \mathbf{u}_4 , deve esistere una soluzione \mathbf{x} con $x_2 = 0$, e questo accade per $\alpha = 1$. Si ha pertanto $\mathbf{u}_5 = \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4$.
- (c) Dal punto precedente risulta che, affinché \mathbf{u}_5 dipenda linearmente da \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_4 , deve esistere una soluzione \mathbf{x} con $x_2 = x_4 = 0$, e questo non è possibile.
- (d) Si tratta di individuare una base di $S([A|\mathbf{u}_5])^\perp = S([\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4])^\perp = N([\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4]^T)$. Con il metodo di Gauss la matrice

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

viene ricondotta alla forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

da cui risulta che i vettori del nucleo sono esprimibili come

$$\alpha \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{per } \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Pertanto come base si può scegliere $\{[-\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 1 \ 1 \ 0]^T, [-1 \ \frac{2}{3} \ \frac{2}{3} \ 0 \ 1]^T\}$.

Esercizio 2

- (a) Le colonna j -esima di A è formata dai coefficienti che esprimono $f(\mathbf{e}_j)$ in termini della base canonica, quindi si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Le colonna j -esima della matrice del cambiamento di base P è formata dai coefficienti che esprimono \mathbf{g}_j in termini della base canonica, perciò si ha:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (c) Poiché $B = P^{-1}AP$, e tenendo conto della relazione

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} \text{adj}(P) = \text{adj}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

Si rimanda alla soluzione dell'esercizio 3 del compito C: basta sostituire α con $-\alpha$, e si conclude che A è invertibile per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq 5$.