

Soluzione della prima prova intermedia
di Algebra lineare del 22 novembre 2013 - compito C

Esercizio 1

- (a) Si applica il metodo di Gauss al sistema lineare, e si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ k & 1 & 1 & k+1 \\ 1 & k & -k & -2 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1+k & 1-2k & 1 \\ 0 & 1+k & -2-k & 1 \end{array} \right],$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1+k & 1-2k & 1 \\ 0 & 0 & k-3 & 0 \end{array} \right].$$

Per $k \neq -1, 3$ la matrice è non singolare, quindi la soluzione esiste unica. Per $k = -1$ la matrice triangolare superiore a scalini è

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{array} \right],$$

quindi non esistono soluzioni. Infine per $k = 3$ la matrice triangolare superiore a scalini è

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

quindi esistono infinite soluzioni. Si conclude che il sistema lineare è consistente per $k \neq -1$.

- (b) Sia $k = 3$. Dalla forma triangolare superiore ottenuta al punto (a) per $k = 3$, si ha $\dim S(A) = \text{rk } A = 2$ e $\dim N(A) = 3 - \text{rk } A = 1$. Una base di $S(A)$ è formata dalle prime due colonne di A : $\{[1 \ 3 \ 1]^T, [-1 \ 1 \ 3]^T\}$. I vettori di $N(A)$ sono le soluzioni di $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, quindi, ponendo $x_3 = \alpha$, sono tutti i vettori della forma

$$\alpha \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix},$$

perciò un base di $N(A)$ è formata dal vettore $[-\frac{3}{4} \ \frac{5}{4} \ 1]^T$.

- (c) Per qualunque matrice $N(A) \subseteq N(A^2)$: infatti, se $\mathbf{x} \in N(A)$, allora $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, quindi $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dimostriamo, nel caso della matrice A con $k = 3$, che vale anche l'inclusione $N(A^2) \subseteq N(A)$:

infatti, se $\mathbf{x} \in N(A^2)$, allora $A(A\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ e quindi $A\mathbf{x} \in N(A)$: questo implica che sia

$$A\mathbf{x} = \alpha \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix},$$

per qualche α . Riportando con il metodo di Gauss tale sistema a forma triangolare si ottiene

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -\frac{3}{4}\alpha \\ 0 & 4 & -5 & \frac{7}{4}\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{4}\alpha \end{array} \right],$$

e quindi il sistema è consistente per $\alpha = 0$, ovvero per $\mathbf{x} \in N(A)$.

Dalle due inclusioni segue che deve essere $N(A) = N(A^2)$.

Esercizio 2

- (a) Siano P e Q le matrici che rappresentano le applicazioni identiche di \mathbf{R}^3 e \mathbf{R}^2 , rispettivamente, dagli spazi con le basi assegnate agli spazi con le basi canoniche. Si ha

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice B è la seguente

$$\begin{aligned} B &= Q^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (b) Modificando il terzo vettore della base di \mathbf{R}^3 si modifica la terza colonna di P ; se indichiamo con \mathbf{p}_3 la terza colonna di P , e con \mathbf{b}_3 la terza colonna di B , dal punto (a) si ha la relazione:

$$\mathbf{b}_3 = Q^{-1}A\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{p}_3.$$

Quindi la sola colonna di B che può annullarsi in conseguenza di una variazione di \mathbf{p}_3 è la terza, e questo accade se e solo se $\mathbf{p}_3 \in N(Q^{-1}A)$. La forma triangolare di $Q^{-1}A$, ottenuta con il metodo di Gauss, è

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui si ha che i vettori del suo nucleo hanno la forma $\alpha[1 \ -1 \ 1]^T$, per $\alpha \in \mathbf{R}$. Ad esempio, si può scegliere $\mathbf{p}_3 = [1 \ -1 \ 1]^T$.

Esercizio 3

- (a) Con il metodo di Gauss si affronta la risoluzione del sistema $AX = I$, e si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & \beta & \gamma & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

A è invertibile se e solo se $\alpha \neq 0$, e, con tre sostituzioni all'indietro si ha:

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{\alpha^3} - \frac{\gamma}{\alpha^2} & -\frac{\beta}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{\beta}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Detta C la matrice dei cofattori, si ha:

$$C = \begin{bmatrix} \alpha\gamma - \beta^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 \\ \alpha\beta & -\alpha^2 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\det A} C^T = \frac{1}{-\alpha^3} \begin{bmatrix} \alpha\gamma - \beta^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 \\ \alpha\beta & -\alpha^2 & 0 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta^2}{\alpha^3} - \frac{\gamma}{\alpha^2} & -\frac{\beta}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{\beta}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (c) Per $\alpha = 1$ e $\gamma = 0$ si ha:

$$Z = A + A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \beta \\ 1 & \beta & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta^2 & -\beta & 1 \\ -\beta & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^2 & -\beta & 2 \\ -\beta & 2 & \beta \\ 2 & \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando la regola di Laplace rispetto all'ultima riga si ottiene:

$$\det Z = 2(-\beta^2 - 4) - \beta(\beta^3 - \beta^2) = -\beta^2 - 4\beta^2 - 8.$$

È $\det Z < 0$ per ogni β , quindi non esistono matrici Z singolari.