Soluzione della prima prova intermedia
di Algebra lineare del 5 dicembre 2012 - compito C

Esercizio 1

(a) $\mathbf{u}_5$ può essere espresso come combinazione lineare degli altri vettori $\mathbf{u}_i, i = 1, \ldots, 4$ se e solo se il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{u}_5$ ha soluzioni, dove $A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4]$, e $\mathbf{x}$ è il vettore formato dai coefficienti della combinazione lineare. Si applica il metodo di Gauss al sistema lineare, e si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Quindi si ha $\operatorname{rank} A = 3$, $\operatorname{rank}[A|\mathbf{u}_5] = 3$, $\dim N(A) = 1$. I vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_4$ formano una base di $S(A)$. Il sistema ha infinite soluzioni, che si possono esprimere come

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{per } \alpha \in \mathbf{R}.$$

(b) Dal punto precedente risulta che, affinché $\mathbf{u}_5$ dipenda linearmente da $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3$ e $\mathbf{u}_4$, deve esistere una soluzione $\mathbf{x}$ con $x_2 = 0$, e questo accade per $\alpha = 1$. Si ha pertanto $\mathbf{u}_5 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4$.

(c) Dal punto precedente risulta che, affinché $\mathbf{u}_5$ dipenda linearmente da $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_4$, deve esistere una soluzione $\mathbf{x}$ con $x_2 = x_3 = 0$, e questo non è possibile.

(d) Si tratta di individuare una base di $S([A|\mathbf{u}_5])^\perp = S([\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4])^\perp = N([\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4]^T)$. Con il metodo di Gauss la matrice

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4]^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

viene ricondotta alla forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix},$$

da cui risulta che i vettori del nucleo sono esprimibili come

$$\alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{per } \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

Pertanto come base si puó scegliere $\left\{[\frac{1}{2} \ -2 \ -\frac{1}{2} \ 1 \ 0]^T, [0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1]^T\right\}$.

Esercizio 2

(a) Le colonna j-esima di A è formata dai coefficienti che esprimono $f(\mathbf{e}_j)$ in termini della base canonica, quindi si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Le colonna j-esima della matrice del cambiamento di base P è formata dai coefficienti che esprimono $\mathbf{g}_j$ in termini della base canonica, perciò si ha:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Poiché $B = P^{-1}AP$, e tenendo conto della relazione

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\operatorname{adj}(P) = \operatorname{adj}(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

si ottiene

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

Esercizio 3

Dalla definizione si ottiene la matrice A:

$$A = \begin{bmatrix} 1+\alpha & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \end{bmatrix}.$$

Permutando le righe di A in ordine inverso si ha la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 1 & 1 & 1 & 1+\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1+\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1+\alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1+\alpha & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applicando il metodo di Gauss a $B = B^{(1)}$, si ottengono le matrici:

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha^2-2\alpha \end{bmatrix}, B^{(2)'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & -\alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha^2-2\alpha \end{bmatrix},$$

$$B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & -\alpha & -\alpha & -\alpha^2-3\alpha \end{bmatrix}, B^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & -\alpha^2-4\alpha \end{bmatrix},$$

$$B^{(5)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1+\alpha \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^2-5\alpha \end{bmatrix}.$$

Si osservi che non occorre supporre $\alpha \neq 0$, dal momento che non sono state efettuate divisioni per α. Poiché B è stata ottenuta da A con due scambi di righe, $\det B = \det A$. Inoltre $\det B = (-\alpha)^3(-\alpha^2 - 5\alpha) = \alpha^4(\alpha+5)$, quindi A è invertibile per $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -5$.