

Soluzione della prima prova intermedia  
di Algebra lineare del 20 novembre 2013 - compito B

**Esercizio 1**

- (a) Si determinano dapprima le dimensioni di  $U_k$  e  $V$ . Applicando il metodo di Gauss alla matrice  $A = [ \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3 ]$  si ha:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$
$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui, essendo  $\text{rank } A^{(3)} = \text{rank } A = \dim(U_k)$ , risulta  $\dim(U_k) = 2$  per  $k = 0$ ,  $\dim(U_k) = 3$  per  $k \neq 0$ .

Applicando il metodo di Gauss alla matrice  $B = [ \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 ]$  si ha:

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui, essendo  $\text{rank } B^{(3)} = \text{rank } B = \dim(V)$ , risulta  $\dim(V) = 2$ .

Poiché nel caso che sia  $\mathbf{R}^4 = U_k \oplus V$  deve essere  $4 = \dim(U_k) + \dim(V)$ , è necessario che sia  $k = 0$ . In tal caso  $\{ \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \}$  è una base di  $U_0$ .

Verifichiamo adesso se  $\mathbf{R}^4 = U_0 + V$ , cioè se la matrice  $C = [ \mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 ]$  ha rango massimo 4. Applicando il metodo di Gauss a  $C$  si ottiene:

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad C^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$C^{(3)} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

quindi  $\text{rank } C = 4$ . Resta da verificare se  $U_0 \cap V = \{\mathbf{0}\}$ : ma se esistesse un vettore non nullo  $\mathbf{x} \in U_0 \cap V$  allora si avrebbe  $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 = \alpha_3 \mathbf{v}_1 + \alpha_4 \mathbf{v}_2$  e quindi esisterebbe la combinazione lineare nulla

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 - \alpha_3 \mathbf{v}_1 - \alpha_4 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

con qualche coefficiente  $\alpha_i \neq 0$ , il che è assurdo, perché i vettori  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  sono linearmente indipendenti.

In alternativa si ha che  $U_0 \cap V = \{\mathbf{0}\}$  come conseguenza della relazione per la dimensione degli spazi somma  $\dim(\mathbf{R}^4) = \dim(U_0) + \dim(V) - \dim(U_0 \cap V)$ .

Si conclude che l'unico valore di  $k$  per il quale si ha la somma diretta è  $k = 0$ .

- (b) Sia dunque  $k = 0$ . Si ha  $[1 \ 1 \ 1 \ 1]^T = x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + x_3 \mathbf{v}_1 + x_4 \mathbf{v}_2$ , dove  $\mathbf{x}$  è la soluzione del sistema  $C\mathbf{x} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ . Applicando il metodo di Gauss si ottengono le matrici aumentate seguenti:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right].$$

La sostituzione all'indietro restituisce  $\mathbf{x}^T = [\frac{3}{4} \ -3 \ -\frac{1}{2} \ 2]$ , e quindi  $\mathbf{u}^T = [\frac{3}{2} \ -\frac{3}{2} \ 0 \ 3]$ ,  $\mathbf{v}^T = [-\frac{1}{2} \ \frac{5}{2} \ 1 \ -2]$ .

## Esercizio 2

- (a) Detti  $\mathbf{e}_j$  i vettori della base canonica di  $\mathbf{R}^3$ , la colonna  $j$ -esima della matrice  $A$  è formata dai coefficienti che esprimono  $f(\mathbf{e}_j)$  rispetto alla base canonica. Poiché

$$f(\mathbf{e}_1) = [-2 \ 1 \ 1]^T, \quad f(\mathbf{e}_2) = [1 \ -2 \ 1]^T,$$

$$f(\mathbf{e}_3) = [1 \ 1 \ -2]^T,$$

si ha

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Applicando il metodo di Gauss al sistema lineare  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , si ottengono le matrici aumentate seguenti:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & -2 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & -2 & b_3 \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & b_2 + \frac{1}{2}b_1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & b_3 + \frac{1}{2}b_1 \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & b_2 + \frac{1}{2}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 + b_1 \end{array} \right].$$

Il sistema è consistente se e solo se  $b_1 + b_2 + b_3 = 0$ .

(c) Nel caso che la dimensione sia  $n$ , la matrice  $A$  è la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} -n+1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & -n+1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & -n+1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & -n+1 \end{bmatrix}.$$

Si applichi il metodo di Gauss alla matrice  $A$ , dopo averne riordinato le righe in ordine inverso. Ad esempio, per  $n = 5$  si ottiene:

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right], \quad \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & -15 \end{array} \right],$$

$$\left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 5 & -15 \end{array} \right], \dots, \left[ \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & -5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

In generale la matrice triangolare al termine del procedimento è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & -n+1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -n & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il rango di  $A$  è  $n - 1$ .

### Esercizio 3

- (a)  $V$  non è uno spazio vettoriale perché la matrice nulla  $O$  non gli appartiene.
- (b) Si osservi che il vettore  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  formato dai quattro elementi di  $A \in V$ ,

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

risolve il sistema lineare  $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ , ottenuto dalla relazione

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & -x_1 + x_2 \\ x_3 + x_4 & -x_3 + x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_4 \\ x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_2 + x_3 & -x_1 + x_4 \\ x_4 - x_1 & -x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata ottenuta al termine dell'eliminazione gaussiana è

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

per cui le soluzioni sono infinite, e si possono esprimere nel modo seguente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

per  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ . Ne segue che le matrici  $A$  hanno la forma

$$A = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha + 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

- (c) Sì, ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Se  $A \in V$  e  $\det A \neq 0$ , la sua inversa ha la forma

$$Z = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \beta & \alpha - 1 \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

Se  $Z$  appartenesse a  $V$ , essendo  $z_{21} = -\frac{\alpha}{\det A}$  dovrebbe essere  $z_{12} = -z_{21} + 1 = \frac{\alpha}{\det A} + 1 = \frac{\alpha-1}{\det A}$ , e quindi  $\det A = -1$ . Ma questo non è possibile perché

$$\det A = \beta^2 + \alpha^2 - \alpha \neq -1$$

per qualsiasi scelta di  $\alpha$  e  $\beta$  reali. Quindi non esistono matrici di  $V$  invertibili con l'inversa in  $V$ .