

Soluzione della prima prova intermedia
di Algebra lineare del 28 novembre 2012 - compito B

Esercizio 1

- (a) Applicando il metodo di Gauss al sistema lineare si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -6 \\ -2 & 3 & -7 & -1 & 15 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & -9 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 6 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & -2 & 18 \end{array} \right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -20 & 0 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Quindi si ha $\text{rank } A = 3$, $\text{rank } [A|\mathbf{b}] = 3$, $\dim N(A) = 1$. Il sistema ha infinite soluzioni \mathbf{x} , che si possono esprimere assegnando un valore arbitrario α a x_3 , e ricavando x_4 , x_2 e x_1 con una sostituzione all'indietro:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{per } \alpha \in \mathbf{R}.$$

- (b) L'intersezione $Z \cap W$ è formata dai vettori $\mathbf{y} \in Z$ tali che $\mathbf{y} = \beta \mathbf{w}_1 + \gamma \mathbf{w}_2$, ovvero dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} \beta + 3\gamma = -3 - 2\alpha \\ -\beta + \gamma = 3 + \alpha \\ \beta - 6\gamma = \alpha \\ -\beta + 2\gamma = 0 \end{cases},$$

che può essere riscritto nella forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Con il metodo di Gauss la matrice aumentata finale è la seguente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Il sistema è consistente e la soluzione è unica perché il rango della matrice dei coefficienti è uguale al numero delle colonne. Sostituendo all'indietro si trova $\gamma = 1$, $\beta = 2$ e $\alpha = -4$. L'intersezione $Z \cup W$ contiene quindi il solo vettore $[5 \ -1 \ -4 \ 0]^T$.

Esercizio 2

- (a) $A = O$ soddisfa la relazione, quindi V non è vuoto.
- (b) Se esiste qualche matrice A invertibile in V , si moltiplichino a sinistra (o a destra) per $(A^{-1})^2$ entrambi i membri della relazione che definisce V :

$$(A^{-1})^2 A^3 = -(A^{-1})^2 4A^2, \quad \text{da cui}$$

$$A = -4I.$$

È immediato verificare che $A = -4I$ verifica la relazione, ed è quindi l'unica matrice invertibile in V .

- (c) V non è uno spazio vettoriale: se lo fosse, αI dovrebbe appartenere a V per ogni α reale, il che è falso.
- (d) Per $A \in V$ si ha $A^3 + 4A^2 = A^2(A + 4I) = O$. Sia $\mathbf{y} \in S(A + 4I)$, si verifica che $\mathbf{y} \in N(A^2)$: infatti $A^2\mathbf{y} = A^2(A + 4I)\mathbf{x}$ per qualche \mathbf{x} , e quindi $A^2\mathbf{y} = O\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dall'inclusione $S(A + 4I) \subset N(A^2)$, trattandosi di sottospazi di \mathbf{R}^n , si ottiene la disuguaglianza $\text{rank}(A + 4I) \leq \dim N(A^2)$.
- (e) Se la matrice assegnata A appartiene a V , essendo $A \neq 2I$ deve essere singolare. Pertanto si calcola il determinante di A , con il metodo di Gauss, oppure con la regola di Sarrus, oppure con la regola di Laplace nel modo seguente: prima si sottrae dalla terza colonna la prima moltiplicata per 2, e poi si aggiunge alla terza riga la seconda, ottenendo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 8 & k & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 8k.$$

Quindi A può appartenere a V solo per $k = 0$. In tal caso

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -16 \\ 3 & -1 & -5 \\ 5 & 1 & -11 \end{bmatrix}.$$

Per verificare se A appartiene effettivamente a V senza calcolare A^2 e A^3 , basta controllare se $A \cdot A(A + 4I) = O$. Svolgendo i prodotti:

$$A \cdot A \begin{bmatrix} 12 & 0 & -16 \\ 3 & 3 & -5 \\ 5 & 1 & -7 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 16 & -16 & -16 \\ 8 & -8 & -8 \\ 8 & -8 & -8 \end{bmatrix} = O.$$

Quindi per $k = 0$ $A \in V$.

Esercizio 3

Si osservi che i nove elementi di A sono soluzione del sistema lineare omogeneo $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ottenuto da

$$JA - AJ = \begin{bmatrix} a_{21} - a_{12} & a_{22} - a_{11} & a_{23} - a_{13} \\ a_{11} - a_{22} & a_{12} - a_{21} & a_{13} - a_{23} \\ a_{31} - a_{32} & a_{12} - a_{32} & a_{33} - a_{33} \end{bmatrix} = O,$$

ponendo $\mathbf{x} = [a_{11} \ a_{21} \ a_{31} \ a_{12} \ a_{22} \ a_{32} \ a_{13} \ a_{23} \ a_{33}]^T$, e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando il metodo di Gauss, con lo scambio della prima con la seconda riga, si ottiene la matrice ridotta a scalini

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\text{rank } B = 4$, $\dim N(B) = 5$.

- (a) Per quanto sopra osservato, i vettori \mathbf{x} contenenti gli elementi delle matrici A formano il nucleo di B , quindi anche le matrici A formano uno spazio vettoriale di dimensione 5. In alternativa si può dimostrare che V è uno spazio vettoriale verificandone la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalare. Una base di V si ottiene da una base di $N(B)$: una base di $N(B)$ è $\{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_6, \mathbf{e}_7 + \mathbf{e}_8, \mathbf{e}_9\}$, e la corrispondente base di V è formata dalle 5 matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Si osservi che J è invertibile e che $J^{-1} = J$. Inoltre dall'uguaglianza $JA = AJ$, invertendo entrambi i membri, si ottiene $A^{-1}J = JA^{-1}$, il che dimostra che, se A appartiene a V ed è invertibile, anche A^{-1} appartiene a V .
- (c) La matrice A assegnata appartiene a V perché commuta con J , o perché è facilmente esprimibile come combinazione lineare delle matrici della base trovata al punto (a). A è invertibile perché $\det A = 8$. Dell'inversa $Z = A^{-1}$ è sufficiente calcolare i 5 elementi

$$z_{11} = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}, \quad z_{21} = -\frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4},$$

$$z_{31} = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}, \quad z_{13} = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2},$$

$$z_{33} = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0,$$

e quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$