Soluzione della prima prova intermedia di Algebra lineare del 20 novembre 2013 - compito A

Esercizio 1

(a) Si determinano dapprima le dimensioni di U_k e V. Applicando il metodo di Gauss alla matrice $A = [\ \mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3\ ]$ si ha:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & k \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui, essendo $\operatorname{rank} A^{(3)} = \operatorname{rank} A = \dim(U_k)$, risulta $\dim(U_k) = 2$ per $k = 2$, $\dim(U_k) = 3$ per $k \neq 2$.

Applicando il metodo di Gauss alla matrice $B = [\ \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ ]$ si ha:

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui, essendo $\operatorname{rank} B^{(3)} = \operatorname{rank} B = \dim(V)$, risulta $\dim(V) = 2$.

Poiché nel caso che sia $\mathbf{R}^4 = U_k \bigoplus V$ deve essere $4 = \dim(U_k) + \dim(V)$, è necessario che sia $k = 2$. In tal caso $\{\ \mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \}$ è una base di U_2.

Verifichiamo adesso se $\mathbf{R}^4 = U_2 + V$, cioè se la matrice $C = [\ \mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ ]$ ha rango massimo 4. Applicando il metodo di Gauss a C si ottiene:

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

quindi $\operatorname{rank} C = 4$. Resta da verificare se $U_2 \cap V = \{\mathbf{0}\}$: ma se esistesse un vettore non nullo $\mathbf{x} \in U_2 \cap V$ allora si avrebbe $\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 = \alpha_3\mathbf{v}_1 + \alpha_4\mathbf{v}_2$ e quindi esisterebbe la combinazione lineare nulla

$$\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u}_2 - \alpha_3\mathbf{v}_1 - \alpha_4\mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

con qualche coefficiente $\alpha_i \neq 0$, il che è assurdo, perché i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearemente indipendenti.

In alternativa si ha che $U_2 \cap V = \{\mathbf{0}\}$ come conseguenza della relazione per la dimensione degli spazi somma $\dim(\mathbf{R}^4) = \dim(U_2) + \dim(V) - \dim(U_2 \cap V)$.

Si conclude che l'unico valore di k per il quale si ha la somma diretta è $k = 2$.

(b) Sia dunque $k = 2$. Si ha $[\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]^T = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + x_3\mathbf{v}_1 + x_4\mathbf{v}_2$, dove $\mathbf{x}$ è la soluzione del sistema $C\mathbf{x} = [\ 1\ 1\ 1\ 1\ ]^T$. Applicando il metodo di Gauss si ottengono le matrici aumentate seguenti:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

La sostituzione all'indietro restituisce $\mathbf{x}^T = [\,2\ \ \frac{3}{4}\ \ -3\ \ -\frac{1}{2}\,]$, e quindi $\mathbf{u}^T = [\,2\ \ \frac{7}{2}\ \ -\frac{3}{2}\ \ -2\,]$, $\mathbf{v}^T = [\,-1\ \ -\frac{5}{2}\ \ \frac{5}{2}\ \ 3\,]$.

Esercizio 2

(a)) Detti $\mathbf{e}_j$ i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$, la colonna j-esima della matrice A è formata dai coefficienti che esprimono $f(\mathbf{e}_j)$ rispetto alla base canonica. Poiché

$f(\mathbf{e}_1) = [\,\frac{2}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\,]^T$, $\quad f(\mathbf{e}_2) = [\,-\frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\ \ -\frac{1}{3}\,]^T$,
$f(\mathbf{e}_3) = [\,-\frac{1}{3}\ \ -\frac{1}{3}\ \ \frac{2}{3}\,]^T$,
si ha

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b)) Applicando il metodo di Gauss al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, o, più semplicemente al sistema equivalente $3A\mathbf{x} = 3\mathbf{b}$, si ottengono le matrici aumentate seguenti:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3b_1 \\ -1 & 2 & -1 & 3b_2 \\ -1 & -1 & 2 & 3b_3 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3b_1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3b_2 + \frac{3}{2}b_1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 3b_3 + \frac{3}{2}b_1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3b_1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 3b_2 + \frac{3}{2}b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_3 + 3b_2 + 3b_1 \end{array}\right].$$

Il sistema è consistente se e solo se $b_1 + b_2 + b_3 = 0$.

(c) Nel caso che la dimensione sia n, la matrice A è la seguente:

$$A = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix}.$$

Si applichi il metodo di Gauss alla matrice nA, dopo averne riordinato le righe in ordine inverso. Ad esempio, per $n = 5$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & 15 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & -5 & -5 & 15 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

In generale la matrice triangolare al termine del procedimento è

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & n-1 \\ 0 & n & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 & -n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n & -n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il rango di A è $n-1$.

Esercizio 3

(a) V non è uno spazio vettoriale perché la matrice nulla O non gli appartiene.

(b) Si osservi che il vettore $\mathbf{x} = [\,x_1\; x_2\; x_3\; x_4\,]^T$ formato dai quattro elementi di $A \in V$,

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix},$$

risolve il sistema linare $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, ottenuto dalla relazione

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 & x_1 + x_2 \\ x_3 - x_4 & x_3 + x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 + x_3 & x_2 + x_4 \\ -x_1 + x_3 & -x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_2 - x_3 & x_1 - x_4 \\ x_1 - x_4 & x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ e } \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice aumentata ottenuta al termine dell'eliminazione gaussiana è

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

per cui le soluzioni sono infinite, e si possono esprimere nel modo seguente:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

per $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Ne segue che le matrici A hanno la forma

$$A = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha - 1 \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

(c) Sì, ad esempio

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Se $A \in V$ e $\det A \neq 0$, la sua inversa ha la forma

$$Z = A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} \beta & \alpha + 1 \\ -\alpha & \beta \end{bmatrix}.$$

Se Z appartenesse a V, essendo $z_{21} = -\frac{\alpha}{\det A}$ dovrebbe essere $z_{12} = -z_{21} - 1 = \frac{\alpha}{\det A} - 1 = \frac{\alpha+1}{\det A}$, e quindi $\det A = -1$. Ma questo non è possibile perché

$$\det A = \beta^2 + \alpha^2 + \alpha \neq -1$$

per qualsiasi scelta di α e β reali. Quindi non esistono matrici di V invertibili con l'inversa in V.