Soluzione della prima prova intermedia
di Algebra lineare del 28 novembre 2012 - compito A

Esercizio 1

(a) Applicando il metodo di Gauss al sistema lineare si ottengono le seguenti matrici aumentate:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 4 & -11 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 8 & -17 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -24 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Quindi si ha $\operatorname{rank} A = 3$, $\operatorname{rank}[A|\mathbf{b}] = 3$, $\dim N(A) = 1$. Il sistema ha infinite soluzioni $\mathbf{x}$, che si possono esprimere assegnando un valore arbitrario α a x_3, e ricavando x_4, x_2 e x_1 con una sostituzione all'indietro:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{per } \alpha \in \mathbf{R}.$$

(b) L'intersezione $Z \cap W$ è formata dai vettori $\mathbf{y} \in Z$ tali che $\mathbf{y} = \beta\mathbf{w}_1 + \gamma\mathbf{w}_2$, ovvero dalle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} \beta + 4\gamma = 1 - 2\alpha \\ \beta - 4\gamma = -1 + \alpha \\ \beta - 3\gamma = \alpha \\ \beta - 3\gamma = -2 \end{cases},$$

che può essere riscritto nella forma

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Con il metodo di Gauss la matrice aumentata finale è la seguente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Il sistema è consistente e la soluzione è unica perché il rango della matrice dei coefficienti è uguale al numero delle colonne. Sostituendo all'indietro si trova $\gamma = 1$, $\beta = 1$ e $\alpha = -2$. L'intersezione $Z \cup W$ contiene quindi il solo vettore $[5 \;\; -3 \;\; -2 \;\; -2]^T$.

Esercizio 2

(a) $A = O$ soddisfa la relazione, quindi V non è vuoto.

(b) Se esiste qualche matrice A invertibile in V, si moltiplichino a sinistra (o a destra) per $(A^{-1})^2$ entrambi i membri della relazione che definisce V:

$$(A^{-1})^2 A^3 = (A^{-1})^2 2A^2, \quad \text{da cui}$$

$$A = 2I.$$

È immediato verificare che $A = 2I$ verifica la relazione, ed è quindi l'unica matrice invertibile in V.

(c) V non è uno spazio vettoriale: se lo fosse, αI dovrebbe appartenere a V per ogni α reale, il che è falso.

(d) Per $A \in V$ si ha $A^3 - 2A^2 = A^2(A - 2I) = O$. Sia $\mathbf{y} \in S(A - 2I)$, si verifica che $\mathbf{y} \in N(A^2)$: infatti $A^2\mathbf{y} = A^2(A - 2I)\mathbf{x}$ per qualche $\mathbf{x}$, e quindi $A^2\mathbf{y} = O\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dall'inclusione $S(A - 2I) \subset N(A^2)$, trattandosi di sottospazi di $\mathbf{R}^n$, si ottiene la disugualianza $\operatorname{rank}(A - 2I) \leq \dim N(A^2)$.

(e) Se la matrice assegnata A appartiene a V, essendo $A \neq 2I$ deve essere singolare. Pertanto si calcola il determinante di A, con il metodo di Gauss, oppure con la regola di Sarrus, oppure con la regola di Laplace nel modo seguente: prima si sottrae dalla prima riga la terza, e poi dalla seconda colonna la terza, ottenendo

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -k & -4 & -3 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix} = -8k + 16.$$

Quindi A può appartenere a V solo per $k = 2$. In tal caso

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 6 \\ -2 & -7 & -3 \\ 4 & 13 & 5 \end{bmatrix}.$$

Per verificare se A appartiene effettivamente a V senza calcolare A^2 e A^3, basta controllare se $A \cdot A(A-2I) = O$. Svolgendo i prodotti:

$$A \cdot A \begin{bmatrix} 2 & 14 & 6 \\ -2 & -9 & -3 \\ 4 & 13 & 3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = O.$$

Quindi per $k = 2$ $A \in V$.

Esercizio 3

Si osservi che i nove elementi di A sono soluzione del sistema linare omogeneo $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ottenuto da

$$JA - AJ = \begin{bmatrix} a_{31} - a_{13} & a_{32} - a_{12} & a_{33} - a_{11} \\ a_{21} - a_{23} & a_{22} - a_{22} & a_{23} - a_{21} \\ a_{11} - a_{33} & a_{12} - a_{32} & a_{13} - a_{31} \end{bmatrix} = O,$$

ponendo $\mathbf{x} = [a_{11}\, a_{21}\, a_{31}\, a_{12}\, a_{22}\, a_{32}\, a_{13}\, a_{23}\, a_{33}]^T$, e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicando il metodo di Gauss, con lo scambio della prima con la terza riga, si ottiene la matrice ridotta a scalini

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi $\operatorname{rank} B = 4$, $\dim N(B) = 5$.

(a) Per quanto sopra osservato, i vettori $\mathbf{x}$ contenenti gli elementi delle matrici A formano il nucleo di B, quindi anche le matrici A formano uno spazio vettoriale di dimensione 5. In alternativa si può dimostrare che V è uno spazio vettoriale verificandone la chiusura rispetto alla somma e al prodotto per scalare. Una base di V si ottiene da una base di $N(B)$: una base di $N(B)$ è $\{\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_9, \mathbf{e}_2+\mathbf{e}_8, \mathbf{e}_3+\mathbf{e}_7, \mathbf{e}_4+\mathbf{e}_6, \mathbf{e}_5\}$, e la corrispondente base di V è formata dalle 5 matrici

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Si osservi che J è invertibile e che $J^{-1} = J$. Inoltre dall'uguaglianza $JA = AJ$, invertendo entrambi i membri, si otiene $A^{-1}J = JA^{-1}$, il che dimostra che, se A appartiene a V ed è invertibile, anche A^{-1} appartiene a V.

(c) La matrice A assegnata appartiene a V perché commuta con J, o perché è facilmente esprimibile come combinazione lineare delle matrici della base trovata al punto (a). A è invertibile perché $\det A) = -3$. Dell'inversa $Z = A^{-1}$ è sufficiente calcolare i 5 elementi

$$z_{11} = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}, \quad z_{21} = -\frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3},$$

$$z_{31} = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{2}{3}, \quad z_{12} = -\frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3},$$

$$z_{22} = \frac{1}{\det A} \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{3},$$

e quindi

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$