Soluzione della prima prova intermedia di di Algebra lineare del 26 novembre 2015

Esercizio 1

(a) La matrice aumentata del sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è la seguente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right],$$

che, con il metodo di Gauss, è ricondotta alla forma triangolare

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 & -1 \\ 0 & 0 & k-2 & -4 \end{array}\right].$$

Per $k \neq 2$ la matrice è non singolare, quindi esiste un'unica soluzione. Per $k = 2$ la matrice è singolare, e il teorema di Rouché-Capelli non è verificato, quindi non esistono soluzioni.

(b) No, come risulta dal punto precedente.

(c) Per $k \neq 2$, dal sistema triangolare ottenuto con il metodo di Gauss al punto (a) si ottiene, con una sostituzione all'indietro, la soluzione

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{3k-2}{k-2} \\ -\frac{4}{k-2} \end{bmatrix}.$$

Esiste una soluzione linearmente dipendente dal vettore assegnato se e solo se, per qualche valore di k, la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3k-2}{k-2} \\ -\frac{4}{k-2} & -2 \end{bmatrix}$$

ha rango uno. Basta riportarla a forma triangolare con il metodo di Gauss, che al primo passo restituisce la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{4k-4}{k-2} \\ 0 & \frac{4-4k}{k-2} \end{bmatrix},$$

e, per $k \neq 1$, al passo successivo la matrice triangolare superiore

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{4k-4}{k-2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango due. Se invece $k = 1$ si ha già al primo passo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango uno. Quindi per $k = 1$ si ha la soluzione $\boldsymbol{x} = [\,-2,\ -1,\ 4\,]^T$, proporzionale al vettore assegnato.

Esercizio 2

Per n generico la matrice ha la forma seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 3 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

(a) Per $n = 4$ la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

viene trasformata, senza scambi di righe, nella matrice triangolare superiore

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 8/3 & 2/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 5/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 12/5 \end{bmatrix},$$

da cui si ottiene $\det A = 48$.

(b) Al termine delle tre operazioni elementari sulle righe si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

che, dopo le tre operazioni elementari sulle colonne, diventa

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Quest'ultima matrice è triangolare inferiore, il suo determinante è dato dal prodotto degli elementi principali, che vale 48.

(c) Per n generico, dopo le $n-1$ operazioni elementari di riga si ottiene la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

e dopo le $n-1$ operazioni elementari di colonna la matrice triangolare inferiore

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n+2 \end{bmatrix}.$$

Il valore del determinante è quindi $2^{n-1}(n+2)$.

Esercizio 3

(a) Si determinano la dimensione e una base dell'immagine della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix},$$

poiché $V = S(A)$. Usando il metodo di Gauss la matrice A è ricondotta alla forma triangolare superiore

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui si ha che $\dim V = 2$ e che una base è data dall'insieme $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$.

(b) Si ricorda che $S(A)^\perp = N(A^T)$. I sottospazi in questione sono gli stessi se ad A si sostituisce la matrice $[\boldsymbol{v}_1\, \boldsymbol{v}_2]$, si tratta quindi di riportare a forma triangolare superiore la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix},$$

ottenendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

I vettori di $V^{\perp}$ hanno dunque la forma $[-2\alpha,\, 0,\, \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, e una base è l'insieme formato dal solo vettore $\boldsymbol{z}$, con $\boldsymbol{z} = [-2,\, 0,\, 1]$.

(c) La matrice P è 2×3, perché $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 e V ha dimensione 2. Detta π la proiezione rappresentata da P, per gli elementi p_{ij} di P vale la relazione

$$\pi(\boldsymbol{e}_j) = p_{1j}\boldsymbol{v}_1 + p_{2j}\boldsymbol{v}_2, \quad j = 1, 2, 3.$$

Inoltre $\boldsymbol{e}_j = \pi(\boldsymbol{e}_j) + \alpha_j \boldsymbol{z}$, per la decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = V \oplus V^{\perp}$, con $\alpha_j = \boldsymbol{z}^T\boldsymbol{e}_j/\boldsymbol{z}^T\boldsymbol{z}$. Sostituendo nelle precedenti relazioni che definiscono gli elementi di P si ottengono i sistemi lineari

$$[\boldsymbol{v}_1 \,|\, \boldsymbol{v}_2] \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \end{bmatrix} = \boldsymbol{e}_j - \alpha_j \boldsymbol{z}, \quad j = 1, 2, 3,$$

ovvero

$$[\boldsymbol{v}_1 \,|\, \boldsymbol{v}_2]P = I - [\alpha_1\boldsymbol{z}, \alpha_2\boldsymbol{z}, \alpha_3\boldsymbol{z}]\,. \qquad (*)$$

Si calcolano i valori $\alpha_1 = -2/5$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1/5$ e si hanno i tre sistemi lineari:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2/5 & 0 & 4/5 \end{bmatrix},$$

quindi con il metodo di Gauss si ottiene la matrice triangolare aumentata

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 1/5 & 0 & 2/5 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

e con tre sostituzioni all'indietro si ottengono le tre colonne di P:

$$P = \begin{bmatrix} 1/5 & 2/3 & 2/5 \\ 0 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si osservi anche che i sistemi (*) possono essere riscritti nella seguente forma:

$$[\boldsymbol{v}_1 \,|\, \boldsymbol{v}_2 \,|\, \boldsymbol{z}] \left[\begin{array}{ccc} & P & \\ \hline -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{array}\right] = I,$$

quindi P è formata dalle prime due righe dell'inversa della matrice

$$[\boldsymbol{v}_1 \,|\, \boldsymbol{v}_2 \,|\, \boldsymbol{z}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$