Soluzione della prima prova intermedia di Algebra lineare del 5 maggio 2011

Esercizio 1

(a) Per verificare che V è un sottospazio vettoriale basta controllare che è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per scalare. Infatti, se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ appartengono a V e α è un numero reale, per il vettore $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ e per il vettore $\mathbf{t} = \alpha\mathbf{x}$ valgono le relazioni:

$$z_i = x_i + y_i = x_{6-i} + y_{6-i} = z_{6-i}, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

$$\sum_{i=1}^{5} z_i = \sum_{i=1}^{5}(x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{5} x_i + \sum_{i=1}^{5} y_i = 0,$$

$$t_i = \alpha x_i = \alpha x_{6-i} = t_{6-i}, \quad i = 1, \ldots, 5,$$

$$\sum_{i=1}^{5} t_i = \alpha \sum_{i=1}^{5} x_i = 0.$$

(b) La scelta più naturale è la matrice A del sistema lineare omogeneo formato dalle equazioni che definiscono le proprietà dei vettori del sottospazio V:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il metodo di Gauss applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, le cui soluzioni formano $V = N(A)$, produce la matrice triangolare finale:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango 3. Pertanto, $\dim(V) = \dim(N(A)) = 5 - \mathrm{rk}(A') = 2$.

(c) Dopo aver assegnato valori arbitrari α e β rispettivamente a x_5 e x_4, si ottiene, sostituendo all'indietro nel sistema $A'\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{x} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi una base di V è quella formata dai vettori

$$\mathbf{u}_1 = [\ 0\ 1\ \ -2\ 1\ 0\ ]^T, \qquad \mathbf{u}_2 = [\ 1\ 0\ \ -2\ 0\ 1\ ]^T.$$

Se a questi vettori si applica il procedimento di Gram-Schmidt si ottiene la base ortonormale formata dai vettori

$$\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}[\ 0\ 1\ \ -2\ 1\ 0\ ]^T, \qquad \mathbf{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}}[\ 3\ \ -2\ \ -2\ \ -2\ 3\ ]^T.$$

Esercizio 2

Posto $B = A^T - D$, si ha

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3/2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Per determinare i vettori $\mathbf{y}$ di $N(B)$ si applica il metodo di Gauss a $B = B_1$:

$$B_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1/2 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & -15/4 & 15/2 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix},$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & -15/4 & 15/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Risulta $\dim(N(B)) = 4 - \mathrm{rk}(B_4) = 1$. Posto $y_4 = \alpha$, gli altri elementi di $\mathbf{y}$ si ottengono sostituendo all'indietro nel sistema $B_4\mathbf{y} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{y} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I vettori di $N(BA)$ sono tutte le soluzioni dei sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{y} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Con il metodo di Gauss si ottengono le matrici aumentate:

$$[A_1|\mathbf{y}_1] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 & \alpha \\ 2 & 6 & -2 & 4 & -\alpha \\ 3 & 1 & 1 & 4 & 2\alpha \\ -2 & 2 & 2 & 4 & \alpha \end{array}\right],$$

$$[A_2|\mathbf{y}_2] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 32/5 & -8/5 & 4 & -7\alpha/5 \\ 0 & 8/5 & 8/5 & 4 & 7\alpha/5 \\ 0 & 8/5 & 8/5 & 4 & 7\alpha/5 \end{array}\right],$$

$$[A_3|\mathbf{y}_3] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 32/5 & -8/5 & 4 & -7\alpha/5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7\alpha/4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7\alpha/4 \end{array}\right],$$

$$[A_4|\mathbf{y}_4] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 & \alpha \\ 0 & 32/5 & -8/5 & 4 & -7\alpha/5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 7\alpha/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Si ha $\dim(N(A)) = 4 - \mathrm{rk}(A_4) = 1$. Posto $x_4 = \beta$, gli altri elementi di $\mathbf{x}$ si ottengono sostituendo all'indietro nel sistema $A_4\mathbf{x} = \mathbf{y}_4$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3\alpha/8 - \beta/2 \\ -\beta \\ 7\alpha/8 - 3\beta/2 \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3/8 \\ 0 \\ 7/8 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1 \\ -3/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque il nucleo di BA ha dimensione 2.

Esercizio 3

(a) L'inversa può essere calcolata con il metodo di Gauss, oppure usando la relazione che la lega alla matrice aggiunta. Supponiamo di usare il metodo di Gauss, che, in questo caso, deve essere applicato ponendo come termini noti le colonne della matrice identica:

$$[A_1|B_1] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

e, dopo aver scambiato la prima riga con la seconda.,

$$[A_2|B_2] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$[A_3|B_3] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$[A_4|B_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

ottenuta dalla precedente scambiando la terza riga con la quarta. Le colonne dell'inversa si ottengono effettuando, per ognuna di esse, una sostituzione all'indietro rispetto alla corrispondente colonna dei termini noti.

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & -1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & -1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{array}\right].$$

Anche l'inversa è antisimmetrica.

(b) (*facoltativo*) Si tratta di dimostrare che, se $A^T = -A$ e A è invertibile, allora $(A^{-1})^T = -A^{-1}$. Da $A^T = -A$ si ottiene, moltiplicando entrambi i membri a sinistra per A^{-1}:

$$A^{-1}A^T = -I,$$

da cui, trasponendo entrambi i membri:

$$A(A^{-1})^T = -I.$$

Moltiplicando di nuovo a sinistra entrambi i membri per A^{-1}:

$$(A^{-1})^T = -A^{-1}.$$