Soluzione della prova scritta
di Algebra lineare del 2 febbraio 2010

Esercizio 1

(a) Si può calcolare l'inversa applicando il metodo di Gauss ai sistemi lineari $A_kX = I$, limitandosi ad effettuare scambi di righe nei soli casi di pivot nulli.

$$[A_k^{(1)}|B^{(1)}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$[A_k^{(2)}|B^{(2)}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

$$[A_k^{(3)}|B^{(3)}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2(k+1) & -1 & -2 & 1 \end{array}\right],$$

quindi per $k \neq -1$ A_k è invertibile. Con la sostituzione all'indietro applicata ai sistemi triangolari $A_k^{(3)}X = B^{(3)}$ si calcola l'inversa, per $k \neq -1$:

$$A_k^{-1} = X = \frac{1}{1+k}\begin{bmatrix} \dfrac{1+2k}{2} & -1 & \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{k}{2} & 1 & \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{1}{2} & 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Necessariamente è $\bar{k} = -1$, e quindi:

$$A_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Le matrici X tali che $A_{-1}X = O$ hanno le colonne nel nucleo di A_{-1}. Dalla forma triangolare $A_k^{(3)}$ ottenuta al punto (a), per $k = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

risulta che il nucleo di questa matrice è il sottospazio generato da $[-1\ 1\ 1]^T$, pertanto deve essere

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix},$$

con α, β, γ reali. Le colonne di X sono linearmente indipendenti e $\mathrm{rk}(X) \leq 1$.

(c) Dovendo valere $A_{-1}(Z - A_{-1}) = O$, si ha che $Z - A_{-1} = X$, dove X è una delle matrici studiate al punto (b). Quindi esistono infinite matrici Z, della forma $Z = A_{-1} + X$.

Esercizio 2

(a) Non è necessario controllare preliminarmente se i vettori assegnati sono linearmente indipendenti, dal momento che il procedimento di ortogonalizzazione rileva anche la eventuale dipendenza lineare.

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{t}_1}{\sqrt{\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_1}} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2^T\mathbf{y}_1\mathbf{y}_1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{t}_2}{\sqrt{\mathbf{t}_2^T\mathbf{t}_2}} = \frac{1}{3\sqrt{17}}\begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{t}_3 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_3^T\mathbf{y}_1\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_3^T\mathbf{y}_2\mathbf{y}_2 = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \frac{\mathbf{t}_3}{\sqrt{\mathbf{t}_3^T\mathbf{t}_3}} = \frac{1}{\sqrt{17}}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) La relazione proposta

$$|\det X| = \sqrt{\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_1}\sqrt{\mathbf{t}_2^T\mathbf{t}_2}\sqrt{\mathbf{t}_3^T\mathbf{t}_3}$$

vale perché $\det X = -1$, e

$$\sqrt{\mathbf{t}_1^T\mathbf{t}_1} = 3, \quad \sqrt{\mathbf{t}_2^T\mathbf{t}_2} = \frac{\sqrt{17}}{3}, \quad \sqrt{\mathbf{t}_3^T\mathbf{t}_3} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

La relazione era riportata in modo non corretto nel testo distribuito in aula, pertanto questo punto dell'esercizio non è stato considerato nella valutazione.

Esercizio 3

(a) Gli autovalori sono gli zeri del polinomio caratteristico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\mathbf{i}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad \lambda_3 = \mathbf{i}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

(b) Se gli autovalori sono distinti esiste una base di autovettori e A è diagonalizzabile. Gli autovalori non sono distinti se e solo se $a = b = c = 0$, e il tal caso A è nulla, quindi diagonale.

Dunque A è diagonalizzabile per ogni scelta di a, b e c.

Esercizio 4

(a) I coefficienti a_i del polinomio richiesto sono la soluzione del sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1/16 & -1/8 & 1/4 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/16 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Invece di applicare il metodo di Gauss seguendo la strategia usuale, conviene con opportuni operazioni elementari di riga e scambi di colonne ricondurre il sistema alla forma seguente:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_2 \\ a_0 \\ a_3 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

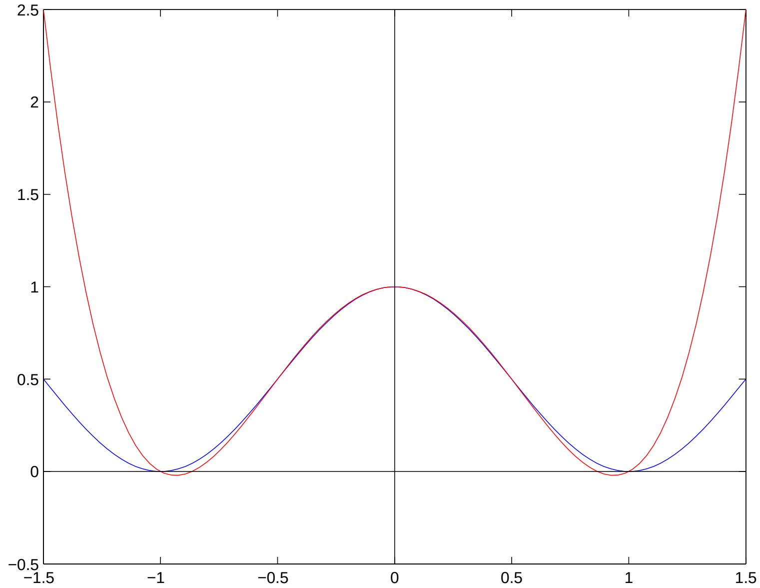
Le due ultime equazioni danno immediatamente $a_3 = a_1 = 0$, la terza dà $a_4 = 1$, mentre le prime due, per sostituzione, danno $a_4 = 4/3$ e $a_2 = -7/3$. Il polinomio è quindi

$$p(x) = \frac{4}{3}x^4 - \frac{7}{3}x^2 + 1.$$

(b) Sono riportati di seguito i grafici, in blu quello della funzione e in verde quello del polinomio. Si osservi che

$$f(x) \le p(x), \text{ per } x \le -1,\ -1/2 \le x \le 1/2, \text{ e } 1 \le x,$$

$$p(x) \le f(x) \text{ altrove.}$$


2.5
2
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5