Soluzione della prova scritta di Algebra lineare del 15 settembre 2009

Esercizio 1

(a) Le colonne della matrice A si ottengono calcolando i vettori $f(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \ldots, 4$ e quindi risulta

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ -1 & 3k+1 & 2 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & k \end{bmatrix}.$$

(b) Applicando il metodo di Gauss alla matrice $A = A^{(1)}$ si ottengono le matrici seguenti:

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 3k+2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & k+3 \end{bmatrix},$$

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 2/3-5k & -2/3+11k \\ 0 & 0 & 0 & k+3 \end{bmatrix}.$$

La dimensione dell'immagine di f è uguale a $r = \text{rk}(A) = \text{rk}(A^{(3)})$. Per $k \neq 2/15$ e $k \neq -3$, $r = 4$. Altrimenti, per $k = 2/15$, completando la triangolarizzazione di A si ottiene

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango $r = 3$. Infine, per $k = -3$, si ha

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 47/3 & -101/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango $r = 3$. Quindi la dimensione minima dell'immagine di f è tre.

(c) Se si sceglie $k = 2/15$, per determinare il vettore $\mathbf{x}$ richiesto si deve risolvere il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \\ -4/5 \end{bmatrix},$$

che non ha soluzioni perché il rango della matrice dei coefficienti e il rango della matrice aumentata non sono uguali.

Se invece si sceglie $k = -3$, si deve risolvere il sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 47/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -11 \\ 101/3 \end{bmatrix},$$

che, risolto con la sostituzione all'indietro, dà:

$$x_1 = -65/47, \quad x_2 = 4/47, \quad x_3 = 101/47.$$

Esercizio 2

La matrice A è

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Con la regola di Laplace applicata alla prima riga si ottiene

$$\det A = -1 \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = -1.$$

Poiché

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

si ha

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) La matrice $I + \alpha \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ ha la forma

$$\begin{bmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha & 1+\alpha \end{bmatrix},$$

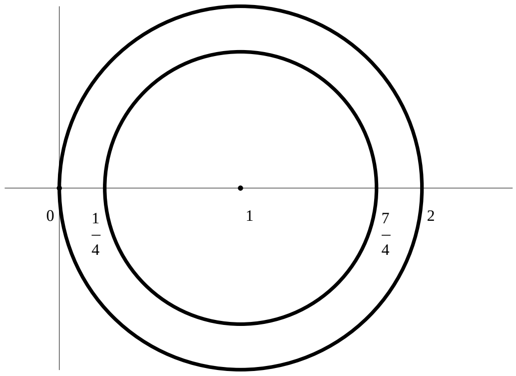
che, posta uguale ad A^{-1}, dà $\alpha = -2$.

Esercizio 3

La matrice A è la seguente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) I cerchi di Gerschgorin di A



e la proprietà che gli autovalori di una matrice simmetrica sono reali, permettono di stabilire che $0 \leq \lambda_i \leq 2$, per tutti gli autovalori λ_i di A.

(b) La matrice B è la seguente:

$$B = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix},$$

e il suo polinomio caratteristico è

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 3/4\lambda^2 + 3/8\lambda,$$

ne segue che gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = (3 \pm \sqrt{33})/8$.

(c) Vale $A = B + 3/4I$. Posto μ_i autovalore di A si ha quindi $\mu_i = \lambda_i + 3/4$, dunque $\mu_1 = 3/4$, $\mu_{2,3} = (9 \pm \sqrt{33})/8$.

Esercizio 4

(a) I valori del polinomio $p(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ nei tre nodi sono

$$p(1/2) = -1, \quad p(1) = 0, \quad p(2) = 1,$$

quindi i suoi coefficienti sono la soluzione del sistema $V\mathbf{a} = [\,-1\ 0\ 1\,]^T$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se si scambiano la prima e la seconda riga e si triangolarizza la matrice aumentata con il metodo di Gauss, si ottiene:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $a_2 = -7/3$, $a_1 = 3$, $a_0 = -2/3$, quindi il polinomio risulta

$$p(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 3x - \frac{7}{3}.$$

(b) La formula del resto dà

$$r(x) = (x - \frac{1}{2})(x-1)(x-2)\frac{f'''(\xi)}{3!} = (x - \frac{1}{2})(x-1)(x-2)\frac{1}{3\xi^3 \log_e 2},$$

che si limita facilmente, in modulo, per $1/2 \le x \le 2$:

$$|r(x)| \le \left(\frac{3}{2}\right)^3 \frac{2^3}{3\log_e 2} = \frac{9}{\log_e 2}.$$