Soluzione della prova scritta di Algebra lineare del 7 luglio 2009

Esercizio 1

(a) Applicando il metodo di Gauss alla matrice $A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5 \end{bmatrix}$ si ottengono le matrici seguenti:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 & -5 \\ -1 & -2 & 4 & -8 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & -6 & 6 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A^{(2)'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -4 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -19 & 19 & -19 \end{bmatrix},$$

$$A^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 6 & -5 \\ 0 & -1 & 5 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dove, essendo $a_{22}^{(2)} = 0$, sono state scambiate la seconda e la terza riga, prima di calcolare $A^{(3)}$. Si ha $r = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^{(4)}) = 3$, le prime tre colonne di $A^{(4)}$ sono linearmente indipendenti e dunque lo sono anche $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

(b) Si osservi che il vettore $\mathbf{x} = [\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5 \,]^T$ dei coefficienti delle combinazioni lineari nulle dei cinque vettori assegnati appartiene al nucleo $N(A)$, quindi, risolvendo con la sostituzione all'indietro $A^{(4)}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si ottiene

$$\mathbf{x} = x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ora, se si pone $x_4 = -1$ e $x_5 = 0$ si ottiene $\mathbf{v_4} = x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + x_3\mathbf{v_3}$ con $x_1 = 2 \quad , x_2 = 1 \quad , x_3 = -1$.

Analogamente, ponendo $x_4 = 0$ e $x_5 = -1$ si ottiene $\mathbf{v_5} = x_1\mathbf{v_1} + x_2\mathbf{v_2} + x_3\mathbf{v_3}$ con $x_1 = -1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1$.

Esercizio 2

(a) È

$$\operatorname{adj}(A(k)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k^2 & k & 1 \end{bmatrix},$$

e poiché $\det(A(k)) = 1$, si ha $A(k)^{-1} = \operatorname{adj}(A(k))$.

(b) Sono uguali, perché per ogni matrice invertibile B si ha

$$I = B\,B^{-1} = (B\,B^{-1})^T = (B^{-1})^T\,B^T,$$

e quindi $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

(c) La matrice $A(k)A(k)^T$ è invertibile perché il suo determinante vale 1. La sua inversa è

$$(A(k)A(k)^T)^{-1} = (A(k)^T)^{-1}A(k)^{-1} = (A(k)^{-1})^T A(k)^{-1},$$

e quindi

$$\mathbf{x} = (A(k)^{-1})^T A(k)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k^2 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} k^4 + k^3 + 2k^2 + k + 1 \\ k^3 + k^2 + 2k + 1 \\ k^2 + k + 1 \end{bmatrix}.$$

$x_1 = (k^2 + k + 1)(k^2 + 1) \neq 0$ per ogni $k \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3

La matrice A ha la struttura seguente:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & \cdots & \cdots & \beta & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \alpha & \beta & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \beta & \alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \beta & \cdots & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

(a) Ponendo $p_n(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, si ottiene, sviluppando $p_n(\lambda)$ con la regola di Laplace:

$$p_n(\lambda) = (\alpha - \lambda)^2 p_{n-2}(\lambda) - \beta^2 p_{n-2}(\lambda) = [(a - \lambda)^2 - \beta^2]p_{n-2}(\lambda),$$

e quindi, per induzione su n:

$$p_n(\lambda) = [(\alpha - \lambda)^2 - \beta^2)]^{n/2}.$$

Gli autovalori sono pertanto $\lambda_1 = \alpha + \beta$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta$, entrambi con molteplicità algebrica e geometrica $n/2$.

(b) Per $n = 4$ gli autovettori relativi a $\lambda_1 = \alpha + \beta$ sono i vettori del nucleo della matrice

$$\begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -\beta & \beta & 0 \\ 0 & \beta & -\beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 & -\beta \end{bmatrix},$$

e quindi sono della forma $[\,a,\, b,\, b,\, a\,]^T$.

Gli autovettori relativi a $\lambda_2 = \alpha - \beta$ sono i vettori del nucleo della matrice

$$\begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & \beta & 0 \\ 0 & \beta & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix},$$

e quindi sono della forma $[\,a,\, b,\, -b,\, -a\,]^T$.

Esercizio 4

I valori del polinomio $p(n) = a_0 n^3 + a_1 n^2 + a_2 n + a_3$ nei quattro nodi sono

$$p(0) = 0, \quad p(1) = 1, \quad p(2) = 5, \quad p(3) = 14,$$

quindi i suoi coefficienti sono la soluzione del sistema $V\mathbf{a} = [0\ 1\ 5\ 14]^T$, dove

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ 27 & 9 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se si permutano le righe nell'ordine 2,3,4,1, e si triangolarizza la matrice aumentata con il metodo di Gauss, si ottiene:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

e, sostituendo all'indietro, $a_3 = 0$, $a_2 = 1/6$, $a_1 = 1/2$, $a_0 = 1/3$, quindi il polinomio risulta

$$p(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$