Soluzione della prova scritta
di Algebra lineare del 14 giugno 2010

Esercizio 1

(a) Si dimostra che se $\mathbf{z} \in S(A^2)$, allora $\mathbf{z} \in S(A)$. Infatti si ha $\mathbf{z} = A^2\mathbf{x}$ per qualche $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$: ponendo $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, risulta $\mathbf{z} = A\mathbf{y}$, e quindi $\mathbf{z} \in S(A)$.

(b) Con il metodo di Gauss si può trasformare A in forma triangolare. Da $A^{(1)} = A$ si ottiene

$$A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & -k+1 \\ 0 & -k & k \\ 0 & -2k+1 & 2k-1 \end{bmatrix},$$

e, per $k \neq 0$,

$$A^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & k-1 & -k+1 \\ 0 & -k & k \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi, per $k \neq 0$, $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^{(3)}) = 2$, e per $k = 0$,

$$\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^{(2)}) = \mathrm{rk} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2.$$

Si conclude che $\mathrm{rk}(A) = 2$ per ogni k.

Dopo aver calcolato A^2 (prodotto riga per colonna di A per A)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & k(k-1) & -k(k-1) \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -(k-1)^2 & (k-1)^2 \end{bmatrix},$$

con Gauss, ponendo $B^{(1)} = A^2$, si ottiene

$$B^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & k(k-1) & -k(k-1) \\ 0 & -k(k-1) & k(k-1) \\ 0 & (-2k+1)(k-1) & (2k-1)(k-1) \end{bmatrix},$$

e, per $k \neq 0$ e $k \neq 1$,

$$B^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & k(k-1) & -k(k-1) \\ 0 & -k(k-1) & k(k-1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, per $k \neq 0$ e $k \neq 1$, $\text{rk}(A^2) = \text{rk}(B^{(3)}) = 2$, mentre per $k = 0$

$$\text{rk}(A^2) = \text{rk}(B^{(2)}) = \text{rk}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2,$$

e per $k = 1$

$$\text{rk}(A^2) = \text{rk}(B^{(2)}) = \text{rk}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Si conclude che

$$\text{rk}(A^2) = \begin{cases} 1, & \text{per } k = 1, \\ 2, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(c) Dal punto (a) si ha che $S(A^2)$ è un sottospazio di $S(A)$, e perché siano uguali anche le loro dimensioni devono esserlo: poiché il rango di una matrice è uguale alla dimensione della sua immagine, tenendo conto di quanto ottenuto al punto (b), si conclude che le due immagini sono uguali, e hanno dimensione due, per tutti i $k \neq 1$.

Esercizio 2

I vettori $\mathbf{x}$ di $S^\perp$ sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ottenuto imponendo l'ortogonalità rispetto ai due vettori che generano S. A è facilmente ricondotta alla forma triangolare

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Si osserva che le soluzioni sono infinite e formano uno spazio di dimensione 4-rk$(A) = 2$. Ponendo $x_3 = \alpha$ e $x_2 = \beta$, risulta che tutte le soluzioni si possono esprimere come

$$\mathbf{x} = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Due soluzioni linearmente indipendenti, che quindi formano una base di $S^\perp$, sono $\mathbf{x}_1 = [-1\ 1\ 0\ 0]^T$, $\mathbf{x}_2 = [-1\ 0\ 1\ 0]^T$.

A questo punto si applica il metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

$$\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{t}_1}{\sqrt{\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_2^T \mathbf{y}_1 \mathbf{y}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{t}_2}{\sqrt{\mathbf{t}_2^T \mathbf{t}_2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ è una base ortonormale di $S^{\perp}$.

Esercizio 3

La matrice A ha la forma

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & \cdots & & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Essendo $\alpha \neq 1$ le prime due righe sono linearmente indipendenti; tutte le altre sono uguali alla seconda, quindi $\det A = 0$ e $\mathrm{rk}(A) = 2$. Questo implica che A ammette 0 come autovalore, con molteplicità geometrica $n - 2$. Quindi A ha al più due autovalori non nulli.

(b) Si può calcolare l'inversa di S come $S^{-1} = \dfrac{1}{\det S} \mathrm{adj}(S)$.

Poiché $\det S = 1$ si ha

$$S^{-1} = \mathrm{adj}(S) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Poi si calcola $B = SAS^{-1}$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2+\alpha & 1+\alpha & \alpha \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di B è

$$p(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \lambda^2[(1-\lambda)(3-\lambda) - 2 - \alpha] = \lambda^2(\lambda^2 - 4\lambda - \alpha + 1).$$

(c) B è una trasformata per similitudine di A, quindi A ha gli stessi autovalori di B, che sono le soluzioni dell'equazione caratteristica $p(\lambda) = 0$:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = 2 - \sqrt{3+\alpha}, \quad \lambda_3 = 2 + \sqrt{3+\alpha}.$$

Esercizio 4

(a) I coefficienti di $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix},$$

che con il metodo di Gauss si riconduce al sistema con matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

che, risolto all'indietro, dà $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = -1/2$. Quindi $p(x) = -1/2\,x^2 + 1$.

(b) I coefficienti di $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ sono la soluzione del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

che con il metodo di Gauss si riconduce al sistema con matrice triangolare

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -5/3 \end{bmatrix},$$

che, risolto all'indietro, dà $b_0 = 5/9$, $b_1 = 0$, $b_2 = -1/18$. Quindi $q(x) = -1/18\,x^2 + 5/9$.

(c) (*facoltativo*) Si ha

$$\begin{aligned} s(x_0) &= \frac{x_0 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_0) + \frac{x_0 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_0) = f(x_0), \\ s(x_1) &= \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) = f(x_1), \\ s(x_2) &= \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_2) = f(x_2), \\ s(x_3) &= \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) = f(x_3). \end{aligned}$$

Ne segue che $s(x)$ assume gli stessi valori di $f(x)$ nei quattro nodi x_i, e quindi è il polinomio di interpolazione di $f(x)$ in tali nodi.