Soluzione della prova scritta
di Laboratorio di Calcolo del 9 settembre 2008

Esercizio 1

(a) Con la regola di Laplace rispetto alla prima riga:

$$\det A = 1 \cdot (1-t^2) - t(t-t^2) + t(t^2-t) = 2t^3 - 3t^2 + 1.$$

(b) Applicando il metodo di Gauss si ottengono le matrici:

$$A^{(0)} = A, \quad A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ 0 & 1-t^2 & t(1-t) \\ 0 & t(1-t) & 1-t^2 \end{pmatrix}.$$

Se $t^2 \neq 1$ si ottiene

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & t & t \\ 0 & 1-t^2 & t(1-t) \\ 0 & 0 & \frac{(1-t)(1+2t)}{1+t} \end{pmatrix},$$

e quindi $\det A = (1-t^2)\frac{(1-t)(1+2t)}{1+t} = (1-t)^2(2t+1) = 2t^3 - 3t^2 + 1$.

Se $t = 1$ $A^{(1)}$ è triangolare e si ha $\det A = 0$.

Se $t = -1$ si scambiano la seconda e la terza riga, ottenendo

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

e quindi $\det A = -\det A^{(2)} = -4$.

Dunque anche per $t^2 = 1$ vale la relazione $\det A = (1-t)^2(2t+1)$.

(c) Per $t = 1$ A è singolare, quindi il sistema lineare omogeneo ha infinite soluzioni.

(d) Per $t = 1$, dal punto (b) la matrice aumentata è

$$(A^{(1)}|\mathbf{b}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

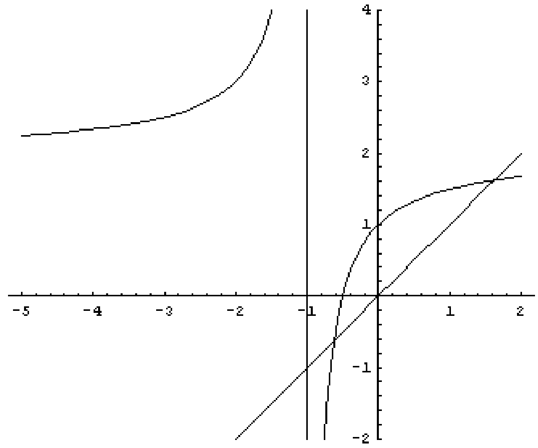
Le soluzioni hanno la forma

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-c-d \\ c \\ d \end{pmatrix},$$

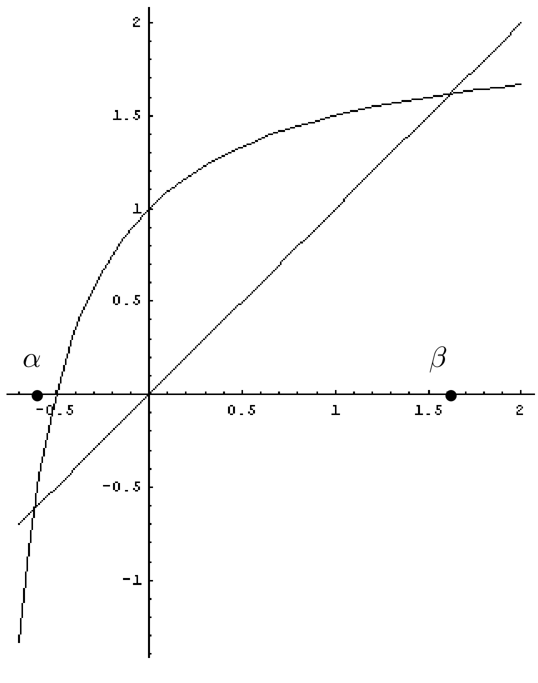
per c, d reali.

Esercizio 2

Si considerino le due intersezioni della bisettrice del primo e del terzo quadrante con il grafico di $g(x)$:



e in particolare la striscia dei punti di ascissa compresa tra -1 e 2, contenente le due intersezioni:



L'interpretazione grafica del metodo iterativo mostra chiaramente che per $x_0 = 0$ si ottiene una successione monotona crescente convergente a β.
In alternativa, osservando che $x_1 = 1$, si può applicare il teorema del punto

fisso all'intorno circolare di centro β ed estremo sinistro 1. In tale intorno vale la disuguaglianza $|g'(x)| = \frac{1}{(x+1)^2} < 1$, e quindi si ha convergenza monotona.

Esercizio 3

```
function a=matrice(n);
a=zeros(n);
for i=2:2:n for j=2:2:n a(i,j)=1; end; end;
```

Esercizio 4

```
function r=serie(x);
i=1;
p=1;
t=1;
s(1)=t;
while abs(t)>10^-8 p=-p*x; t=p*(i+1); s(i+1)=s(i)+t; i=i+1; end
r=s(i);
plot(s)
```