Soluzione della prova scritta
di Laboratorio di Calcolo del 7 luglio 2008

Esercizio 1

(a) Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$, perché A è triangolare superiore. Gli autovalori relativi a λ_1 sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi tutti i vettori della forma $k(1,\ 0)^T$. Gli autovalori relativi a λ_2 sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e quindi tutti i vettori della forma $k(1,\ -1)^T$.

(b) Si ha

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = Ax_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Per i generico si ha $x_i = (2^{i+1} - 1,\ 1)^T$. Il vettore i-esimo normalizzato è

$$\frac{x_i}{||x_i||_\infty} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/(2^{i+1} - 1) \end{pmatrix},$$

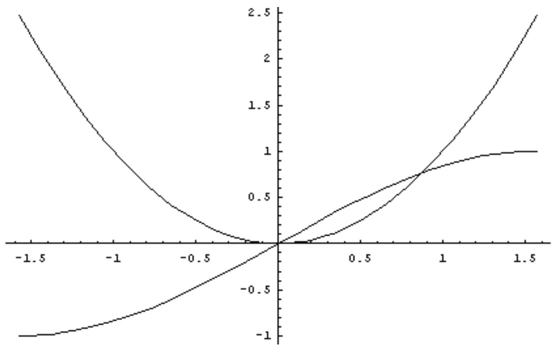
che, per $i \to \infty$, tende all'autovettore $(1,\ 0)^T$.

(d)

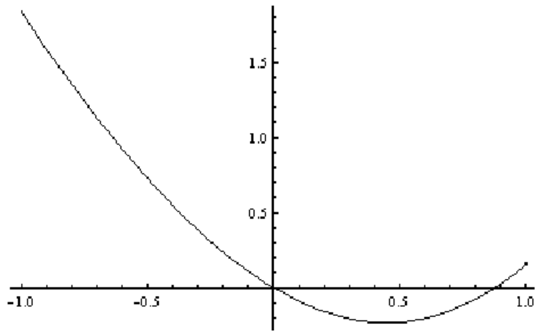
```
a=[2 1; 0 1];
x=[1 1]';
plot([0 x(1)],[0 x(2)],'-o')
hold
for i=1:10 x=a*x; x=x/norm(x,inf);
    plot([0 x(1)],[0 x(2)],'-o');
end
```

Esercizio 2

Dalla separazione grafica



risultano due soluzioni α, con $0.5 < \alpha < 1$ e $\beta = 0$.
Il grafico di $f(x)$ è il seguente:



Per la convergenza ad α, poiché nell'intervallo di separazione è $f'(x) = 2x - \cos x > 0$, $f''(x) = 2 - \sin x > 0$, e inoltre $f(1)f''(1) > 0$, scegliendo $x_0 = 1$ si ha convergenza monotona, del secondo ordine.
Per la convergenza a β, si ha che nell'intervallo $[-1, 0)$ è $f'(x) < 0$, $f"(x) > 0$ e $f(-1)f"(-1) > 0$ e quindi si ha convergenza monotona del secondo ordine a β scegliendo $x_0 = -1$.

Esercizio 3

(a)
```
x(1)=0;
x(2:11)=1./(10:-1:1).^2;
p=polyfit(x,exp(x),10);
```

(b) Posto $p(x) = \sum_{i=1}^{11} p_i x^{11-i}$ la formula richiesta è

$$\int_0^1 p(x)dx = \sum_{i=1}^{11} p_i/(12-i)$$

(c)
```
integrale=sum(p./(11:-1:1));
```

Esercizio 4

```
function a=matrice(n)
for i=1:n for j=1:n a(i,j)=i+j-1; end; end
```