Soluzione della prova scritta
di Laboratorio di Calcolo del 16 aprile 2009

Esercizio 1

(a) Il polinomio caratteristico di A è:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 72\lambda + 108.$$

Sostituendo i divisori di 108 come possibili autovalori interi si trova che $p(3) = 0$, quindi $\lambda_1 = 3$. Dividendo $p(\lambda)$ per $(\lambda - 3)$ si ottiene $p(\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda^2-12\lambda+36)$, da cui i restanti autovalori $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$.

Gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 3$ sono le soluzioni del sistema

$$(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

la cui matrice dei coefficienti, triangolarizzata diventa:

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli autovettori hanno la forma

$$\mathbf{x} = k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

per $k \in \mathbf{R}$. Gli autovettori relativi a $\lambda_2 = \lambda_3 = 6$ sono le soluzioni del sistema

$$(A - 6I)\mathbf{y} = \mathbf{0},$$

la cui matrice dei coefficienti, triangolarizzata diventa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Quindi gli autovettori hanno la forma

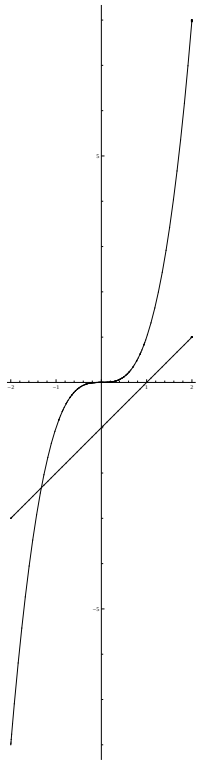
$$\mathbf{y} = k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

per $k \in \mathbf{R}$.

(b) A non è diagonalizzabile perché non ha tanti autovettori linearmente indipendenti quanto è la sua dimensione, cioè 3.

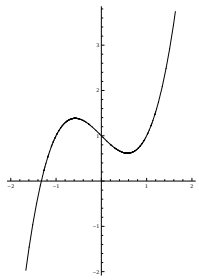
Esercizio 2

(a) Dalla separazione grafica



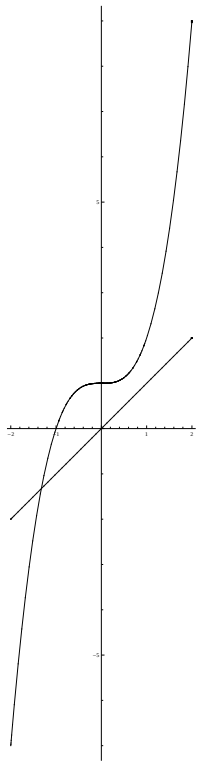
risulta una soluzione reale α, con $-2 < \alpha < -1$.

(b) Il grafico di $f(x) = x^3 - x + 1$ è il seguente:



Per la convergenza ad α, poiché nell'intervallo di separazione è $f'(x) = 3x^2 - 1 > 0$, $f''(x) = 6x < 0$, e inoltre $f(-2)f''(-2) > 0$, scegliendo $x_0 = -2$ si ha convergenza monotona, del secondo ordine.

(c) Il grafico della funzione $g(x) = x^3 + 1$ associata al metodo



mostra che la derivata $g'(x) > 1$ in un intorno di α, poiché $g'(\alpha) > g'(-1) = 3$, e quindi non esiste un intervallo contenente α e soddisfacente le ipotesi sufficienti per la convergenza.

Esercizio 3

```
x(1)=-2:2;
y=exp(x);
c=polyfit(x,y,3);
v=y-polyval(c,x);
norm(v)
```

Esercizio 4

```
function limite=serie(x)
s(1)=1; p=1; t=1;
i=1;
while abs(t)>10^-6 & i<100
   p=-p/x; t=p*i; s(i+1)=s(i)+t; i=i+1;
```

```
end
limite=s(i);
alfa=1-x/(1+x)^2
plot(s-alfa)
```