Esercizi proposti (aprile 2009)

Esercizio 11 Si consideri, per k reale, il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} k & -1 & 1 \\ k+1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -k \\ k+3 \end{bmatrix}.$$

Si calcolino le soluzioni con il metodo di Gauss, al variare di k.

Esercizio 12 Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Si calcolino le soluzioni con il metodo di Gauss.

Esercizio 13 Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 7 & -2 \end{bmatrix},$$

si determinino una base di $N(A)$ e una di $S(A)$.

Esercizio 14 Si vuole determinare un polinomio $p(x) = c_0x^3 + c_1x^2 + c_2x + c_3$ di grado massimo 3, che assuma per i quattro valori della x, $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ i valori $y_0 = -1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 11$. È facile constatare che i coefficienti di $p(x)$ risolvono un opportuno sistema lineare. Pertanto si verifichi che $p(x)$ esiste unico e se ne calcolino i coefficienti.

Esercizio 15 Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}'_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}'_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}'_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si verifichi che i due insiemi $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ e $\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ sono due basi, e si calcoli la matrice P di cambiamento di base, ovvero la matrice che rappresenta l'applicazione identica da $\mathbf{R}^3$ con la seconda base a $\mathbf{R}^3$ con la prima.

Esercizio 16 Si consideri, per α, β, γ reali, il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & \alpha & \alpha - 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1-\alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}.$$

Si calcolino le soluzioni con il metodo di Gauss.

Esercizio 17 Si considerino i sottospazi U e V di $\mathbf{R}^4$ generati rispettivamente dagli insiemi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si calcolino le dimensioni di U e di V, e se ne indichino delle basi. Si trovi anche una base di $U \cap V$.

Esercizio 18 Si consideri il sottoinsieme di $\mathbf{R}^3$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha - \beta \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}.$$

Si verifichi che U è un sottospazio vettoriale, se ne calcoli la dimensione e se ne trovi una base.

Esercizio 19 Si consideri, per k reale, il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali k esistono soluzioni, e, per tali valori di k, si calcolino.

Esercizio 20 Si consideri, per k reale, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si dica per quali k A è invertibile.