Esercizi proposti (maggio 2008)

Esercizio 1 Si calcolino autovettori e autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix},$$

dove $k \in \mathbf{R}$. Si calcoli il massimo del condizionamento di A in norma 2, per $|k| \leq 1/2$, ovvero $\max_{|k|\leq 1/2} \mu_2(A)$.

Esercizio 3 È data la matrice $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & 10 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sapendo che uno degli autovalori di A è uguale a 1, si calcolino gli altri due.

Esercizio 4 È data l'equazione

$$\mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2} = 0.$$

Per l'unica soluzione, si studi la convergenza del metodo delle tangenti (cioè si applichino condizioni sufficienti per la convergenza, indicando un punto iniziale).

Esercizio 5 È data l'equazione

$$\cos^2 x - x^2 + 1 = 0$$

Per l'unica soluzione positiva, si studi la convergenza del metodo delle tangenti (cioè si applichino condizioni sufficienti per la convergenza, indicando un punto iniziale). Per approssimare la stessa soluzione si consideri il metodo di iterazione funzionale

$$x_{i+1} = \sqrt{\cos^2 x_i + 1},$$

verificando, anche in questo caso, condizioni sufficienti di convergenza e indicando un punto iniziale.

Esercizio 6 Usando Matlab, si approssimi il numero $\sqrt{10}$ nei modi seguenti:

1) con tre iterate del metodo di Newton applicato all'equazione

$$(x^2 - 10)(x^2 - 50) = 0,$$

scegliendo 4 come approssimazione iniziale;

2) con quattro iterate del metodo di Newton applicato all'equazione

$$x^2 - 10 = 0,$$

scegliendo anche in questo caso 4 come approssimazione iniziale;

3) con il valore in 10 del polinomio di interpolazione di grado 5 che assume gli stessi valori di $\sqrt{x}$ nei sei punti $1, 4, 9, 49/4, 16, 81/4$.

In tutti i casi si calcoli il valore assoluto dell'errore commesso, assumendo come valore esatto il numero `sqrt(10)` calcolato da Matlab, e si determini qual è il più accurato dei tre metodi.
Al punto (3) si crei una figura con i grafici di $\sqrt{x}$ e del polinomio di interpolazione nell'intervallo $[1, 81/4]$.

Esercizio 7 Usando Matlab:

1) Si costruiscano 1000 matrici A quadrate di ordine 4, con elementi casuali compresi tra 0 e 1, calcolando per ognuna di loro il raggio spettrale (usando la funzione Matlab **eig**) e poi la media aritmetica $v(1)$ di tutti i raggi spettrali;
2) si eseguano gli stessi calcoli indicati al punto (1) per matrici di ordine 8, 12, 16 e 20, assegnando le medie aritmetiche dei raggi spettrali rispettivamente a $v(2), v(3), v(4), v(5)$.
3) si determini la retta di regressione lineare $p(x)$ (polinomio ai minimi quadrati di grado 1) che approssima i cinque punti $(i, v(i)),\ i = 1, 2, \ldots, 5$, e si crei una figura con il grafico di $p(x)$.
4) si calcoli il residuo $\displaystyle\sum_{i=1}^{5}(v(i) - p(i))^2$.

Esercizio 8 Si consideri l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \exp(x^2)dx.$$

Usando Matlab:

1) Si approssimi I con la funzione **quad** di Matlab, con tolleranza 10^{-14}, e lo si assuma come valore esatto;
2) si approssimi I con la formula dei trapezi con $N + 1$ punti, con $N = 2^i,\quad i = 1, 2, \ldots, 11$, e si crei una figura con l'andamento del valore assoluto dell'errore rispetto a I.
3) sapendo che l'errore ha un andamento della forma c/N^k, come si può stimare k utilizzando gli errori calcolati al punto precedente?