Esercizi sul metodo di Gauss

Esercizio 1 Dato il sistema lineare:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -3 \end{array} \quad ,$$

lo si risolva
- con il metodo di Gauss;
- con il metodo di Gauss con massimo pivot.

Esercizio 2 Data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

se ne calcoli l'inversa:
- usando la matrice aggiunta;
- usando il metodo di Gauss applicato ai sistemi lineari $A\mathbf{x} = I$.

Esercizio 3 È dato il sistema lineare:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ -x_1 & - & 5x_2 & + & 3x_3 & & & = & -3 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & & & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -1 \end{array} \quad .$$

Si verifichi che il sistema ha infinite soluzioni. Se ne individui una ortogonale al vettore [1 1 1 1].

Esercizio 4 Data la matrice reale

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

si determini, usando il metodo di Gauss, il valore di α per cui A è singolare.

Esercizio 5 È dato il sistema lineare:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & kx_3 & = & 4 \end{array} \quad ,$$

dove $k \in \mathbf{R}$. Si calcolino, se esistono, i valori del parametro k per cui esistono infinite soluzioni, e, per tali valori di k, si determini l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 6 Si determinino, con il metodo di Gauss, le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -4\,. \\ 3x_1 & + & 8x_2 & - & 3x_3 & = & -5 \end{array}$$

Esercizio 7 Si consideri la matrice 4×4

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 & -4 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne determini il rango con il metodo di Gauss.

Esercizio 8 Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

si verifichi, con il metodo di Gauss, che esistono infinite soluzioni, e fra di loro si determini quella che ha la minima lunghezza euclidea.