CORSO DI LAUREA IN CHIMICA

Corso di Algebra lineare
A.A. 2015-2016 - Appello straordinario del 4 novembre 2016

NOME **COGNOME**

Esercizio 1. È dato il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, con

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

dove $k \in \mathbb{R}$.

(a) Si calcoli l'unico valore di k per cui il sistema ammette infinite soluzioni, e per tale valore di k si determini l'insieme delle soluzioni.

(b) Per il valore di k calcolato al punto (a) si consideri il sistema $A^T\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$. Senza applicare il metodo di Gauss si dimostri che non può avere soluzioni (suggerimento: se il sistema avesse soluzioni, che relazione ci sarebbe tra $\boldsymbol{b}$ e il nucleo $N(A)$?).

Esercizio 2. Assegnata una matrice 2×2 a elementi reali B, si consideri l'insieme V formato dalle matrici 2×2 a elementi reali A tali che $AB = A$.

(a) Si dimostri che V è un sottospazio dello spazio vettoriale delle matrici reali 2×2.

(b) Sia

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Che dimensione ha V in questo caso? Se ne indichi una base.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se ne studi la diagonalizzabilità.

Esercizio 4.

(a) Data la funzione $f(x) = x^3$, si calcoli, risolvendo un opportuno sistema lineare, il polinomio $p(x)$ di grado massimo due che approssima $f(x)$ ai minimi quadrati nei nodi $x_0 = -2,\ x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2$.

(b) (*facoltativo*) I nodi assegnati al punto (a) hanno, per $n = 4$, la proprietà $x_i = -x_{n-i},\ i = 0, \dots, n$, cioè sono simmetrici rispetto allo 0. In generale, per un problema di approssimazione ai minimi quadrati con un polinomio di grado massimo due rispetto a $n + 1$ nodi simmetrici rispetto allo 0, quale proprietà di struttura ha la matrice 3×3 del sistema lineare che si deve risolvere per calcolare i coefficienti del polinomio?